BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN 11

SÁCH GIÁO VIÊN

THỨC
CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG
LÊ VĂN HIỆN – PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ
PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN 11

SÁCH GIÁO VIÊN

(*Tái bản lần thứ nhất*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

QUY ƯỚC VIẾT TẮT DÙNG TRONG SÁCH

CT GDPT	Chương trình Giáo dục phổ thông
HĐ	Hoạt động
HS	Học sinh
GV	Giáo viên
SBT	Sách bài tập
SGK	Sách giáo khoa
SGV	Sách giáo viên
THCS	Trung học cơ sở
THPT	Trung học phổ thông

LỜI NÓI ĐẦU

Sách giáo viên Toán 11 là tài liệu giúp giáo viên hiểu rõ các vấn đề về nội dung, mức độ yêu cầu, phương pháp giảng dạy Sách giáo khoa Toán 11 thuộc bộ sách "Kết nối tri thức với cuộc sống". Cũng có thể hiểu *Sách giáo viên Toán 11* là tài liệu hướng dẫn sử dụng Sách giáo khoa Toán 11 trong công tác dạy học.

Với mong muốn tạo điều kiện cho giáo viên chủ động, sáng tạo trong giảng dạy, *Sách giáo viên Toán 11* chủ yếu làm rõ các vấn đề sau:

1. Chương trình môn Toán cấp Trung học phổ thông, bao gồm cả vấn đề phương pháp dạy học được cụ thể hoá trong TOÁN 11 như thế nào.
2. Ý tưởng của tác giả ẩn sau cấu trúc sách, cấu trúc bài học và từng nội dung cụ thể mà GV cần hiểu rõ để truyền tải cho HS.
3. Một số gợi ý trong việc tổ chức cho HS học tập trên lớp, như tổ chức thực hiện các nội dung được thiết kế trong sách.
4. Cung cấp đáp án cho các hoạt động, câu hỏi, bài luyện tập trên lớp, bài vận dụng và bài tập trong SGK.
5. Gợi ý tổ chức thực hiện các hoạt động trải nghiệm ngoài giờ lên lớp.

Với tinh thần đó, *Sách giáo viên Toán 11* gồm hai phần:

- *Phần một*. Hướng dẫn chung

  Phần này trình bày các vấn đề như: Chương trình (mục tiêu và những điểm cần lưu ý); Giới thiệu chung về Sách giáo khoa Toán 11 (quan điểm biên soạn, cấu trúc nội dung, cấu trúc các bài học, phương pháp tiếp cận); Phương pháp dạy học, đánh giá kết quả giáo dục.

- *Phần hai*. Hướng dẫn cụ thể

  Phần này sẽ đi vào từng chương, bài với nội dung, thời lượng và mục tiêu cần đạt; một số gợi ý về cách tổ chức giảng dạy hay thực hiện các phần quan trọng của mỗi bài học; Đáp số/hướng dẫn/lời giải cho các câu hỏi, bài luyện tập tại lớp, bài vận dụng và bài tập trong SGK.

Hi vọng, *Sách giáo viên Toán 11* sẽ là tài liệu hữu ích cho GV khi giảng dạy TOÁN 11.

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

PHẦN MỘT. HƯỚNG DẪN CHUNG 5

PHẦN HAI. HƯỚNG DẪN CỤ THỂ 29

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 29

Bài 1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác 31

Bài 2. Công thức lượng giác 44

Bài 3. Hàm số lượng giác 54

Bài 4. Phương trình lượng giác cơ bản 62

Bài tập cuối chương I 72

CHƯƠNG II. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN 75

Bài 5. Dãy số 77

Bài 6. Cấp số cộng 83

Bài 7. Cấp số nhân 88

Bài tập cuối chương II 94

CHƯƠNG III. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM 97

Bài 8. Mẫu số liệu ghép nhóm 98

Bài 9. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm 101

Bài tập cuối chương III 106

CHƯƠNG IV. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN 109

Bài 10. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian 110

Bài 11. Hai đường thẳng song song 123

Bài 12. Đường thẳng và mặt phẳng song song 132

Bài 13. Hai mặt phẳng song song 139

Bài 14. Phép chiếu song song 152

Bài tập cuối chương IV 161

CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC 163

Bài 15. Giới hạn của dãy số 164

Bài 16. Giới hạn của hàm số 170

Bài 17. Hàm số liên tục 177

Bài tập cuối chương V 182

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT 185

Bài 18. Luỹ thừa với số mũ thực 186

Bài 19. Lôgarit 192

Bài 20. Hàm số mũ và hàm số lôgarit 198

Bài 21. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit 201

Bài tập cuối chương VI 208

CHƯƠNG VII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN 210

Bài 22. Hai đường thẳng vuông góc 210

Bài 23. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 215

Bài 24. Phép chiếu vuông góc. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 223

Bài 25. Hai mặt phẳng vuông góc 230

Bài 26. Khoảng cách 242

Bài 27. Thể tích 249

Bài tập cuối chương VII 253

CHƯƠNG VIII. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT 255

Bài 28. Biến cố hợp, biến cố giao, biến cố độc lập 256

Bài 29. Công thức cộng xác suất 261

Bài 30. Công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập 267

Bài tập cuối chương VIII 273

CHƯƠNG IX. ĐẠO HÀM 276

Bài 31. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm 277

Bài 32. Các quy tắc tính đạo hàm 285

Bài 33. Đạo hàm cấp hai 293

Bài tập cuối chương IX 297

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM 300

Một vài áp dụng của Toán học trong tài chính 300

Lực căng mặt ngoài của nước 302

Một vài mô hình toán học sử dụng hàm số mũ và hàm số lôgarit 304

Hoạt động thực hành trải nghiệm Hình học 307

Bài tập ôn tập cuối năm 309

PHẦN MỘT HƯỚNG DẪN CHUNG

A MỤC TIÊU MÔN HỌC

I Mục tiêu chung của môn Toán

Chương trình môn Toán giúp HS đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

1. Hình thành và phát triển năng lực toán học bao gồm các thành tố cốt lõi sau: năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hoá toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.

2. Góp phần hình thành và phát triển ở HS các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung theo các mức độ phù hợp với môn học, cấp học được quy định tại Chương trình tổng thể.

3. Có kiến thức, kĩ năng toán học phổ thông, cơ bản, thiết yếu; phát triển khả năng giải quyết vấn đề có tính tích hợp liên môn giữa môn Toán và các môn học khác như Vật lí, Hoá học, Sinh học, Địa lí, Tin học, Công nghệ, Lịch sử, Nghệ thuật, ...; tạo cơ hội để HS được trải nghiệm, áp dụng toán học vào thực tiễn.

4. Có hiểu biết tương đối tổng quát về sự hữu ích của toán học đối với từng ngành nghề liên quan để làm cơ sở định hướng nghề nghiệp, cũng như có đủ năng lực tối thiểu để tự tìm hiểu những vấn đề liên quan đến toán học trong suốt cuộc đời.

II Mục tiêu của môn Toán cấp Trung học phổ thông

Môn Toán cấp Trung học phổ thông nhằm giúp HS đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

1. Góp phần hình thành và phát triển năng lực toán học với yêu cầu cần đạt: nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để hiểu được những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; thiết lập được mô hình toán học để mô tả tình huống, từ đó đưa ra cách giải quyết vấn đề toán học đặt ra trong mô hình được thiết lập; thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề và đánh giá được giải pháp đã thực hiện, phản ánh được giá trị của giải pháp, khái quát hoá được cho vấn đề tương tự; sử dụng được công cụ, phương tiện học toán trong học tập, khám phá và giải quyết vấn đề toán học.

2. Có những kiến thức và kĩ năng toán học cơ bản, thiết yếu về:

- Đại số và Giải tích: Tính toán và sử dụng công cụ tính toán; sử dụng ngôn ngữ và kí hiệu đại số; biến đổi biểu thức đại số và siêu việt (lượng giác, mũ, lôgarit), phương trình, hệ phương trình, bất phương trình; nhận biết các hàm số sơ cấp cơ bản (luỹ thừa, lượng giác, mũ, lôgarit); khảo sát hàm số và vẽ đồ thị hàm số bằng công cụ đạo hàm; sử dụng ngôn ngữ hàm số, đồ thị hàm số để mô tả và phân tích một số quá trình và hiện tượng trong thế giới thực; sử dụng tích phân để tính toán diện tích hình phẳng và thể tích vật thể trong không gian.
- Hình học và Đo lường: Cung cấp những kiến thức và kĩ năng (ở mức độ suy luận lôgic) về các quan hệ hình học và một số hình phẳng, hình khối quen thuộc; phương pháp đại số (vectơ, toạ độ) trong hình học; phát triển trí tưởng tượng không gian; giải quyết một số vấn đề thực tiễn đơn giản gắn với Hình học và Đo lường.
- Thống kê và Xác suất: Hoàn thiện khả năng thu thập, phân loại, biểu diễn, phân tích và xử lí dữ liệu thống kê; sử dụng các công cụ phân tích dữ liệu thống kê thông qua các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm và ghép nhóm; sử dụng các quy luật thống kê trong thực tiễn; nhận biết các mô hình ngẫu nhiên, các khái niệm cơ bản của xác suất và ý nghĩa của xác suất trong thực tiễn.

3. Góp phần giúp HS có những hiểu biết tương đối tổng quát về các ngành nghề gắn với môn Toán và giá trị của nó; làm cơ sở cho định hướng nghề nghiệp sau trung học phổ thông; có đủ năng lực tối thiểu để tự tìm hiểu những vấn đề liên quan đến toán học trong suốt cuộc đời.

III Mục tiêu môn Toán lớp 11

Cụ thể hoá mục tiêu môn học, Toán lớp 11 nhằm giúp HS đạt được các kiến thức và kĩ năng sau:

1. *Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác*

- Nhận biết được các khái niệm cơ bản về góc lượng giác: khái niệm góc lượng giác; số đo của góc lượng giác; hệ thức Chasles cho các góc lượng giác; đường tròn lượng giác.
- Nhận biết được khái niệm giá trị lượng giác của một góc lượng giác.
- Mô tả được bảng giá trị lượng giác của một số góc lượng giác thường gặp; hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác; quan hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt: bù nhau, phụ nhau, đối nhau, hơn kém nhau π.

- Sử dụng được máy tính cầm tay (MTCT) để tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác khi biết số đo của góc đó.
- Mô tả được các phép biến đổi lượng giác cơ bản: công thức cộng; công thức góc nhân đôi; công thức biến đổi tích thành tổng và công thức biến đổi tổng thành tích.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác và các phép biến đổi lượng giác.
- Nhận biết được các khái niệm về hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết được các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết được định nghĩa các hàm lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ thông qua đường tròn lượng giác.
- Mô tả được bảng giá trị của bốn hàm số lượng giác đó trên một chu kì.
- Vẽ được đồ thị của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.
- Giải thích được: tập xác định; tập giá trị; tính chất chẵn, lẻ; tính tuần hoàn; chu kì; khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ dựa vào đồ thị.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số lượng giác (ví dụ: một số bài toán có liên quan đến dao động điều hoà trong Vật lí, ...).
- Nhận biết được công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản: $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$ bằng cách vận dụng đồ thị hàm số lượng giác tương ứng.
- Tính được nghiệm gần đúng của phương trình lượng giác cơ bản bằng MTCT.
- Giải được phương trình lượng giác ở dạng vận dụng trực tiếp phương trình lượng giác cơ bản (ví dụ: giải phương trình lượng giác dạng $\sin 2x = \sin 3x$, $\sin x = \cos 3x$).
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với phương trình lượng giác (ví dụ: một số bài toán liên quan đến dao động điều hoà trong Vật lí, ...).

2. *Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân*

- Nhận biết được dãy số hữu hạn, dãy số vô hạn.
- Thể hiện được cách cho dãy số bằng liệt kê các số hạng; bằng công thức tổng quát; bằng hệ thức truy hồi; bằng cách mô tả.
- Nhận biết được tính chất tăng, giảm, bị chặn của dãy số trong những trường hợp đơn giản.

- Nhận biết được một dãy số là cấp số cộng.
- Giải thích được công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng.
- Tính được tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với cấp số cộng để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn (ví dụ: một số vấn đề trong Sinh học, trong Giáo dục dân số, ...).
- Nhận biết được một dãy số là cấp số nhân.
- Giải thích được công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân.
- Tính được tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với cấp số nhân để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn (ví dụ: một số vấn đề trong Sinh học, trong Giáo dục dân số, ...).

3. *Giới hạn. Hàm số liên tục*

- Nhận biết được khái niệm giới hạn của dãy số.
- Giải thích được một số giới hạn cơ bản như: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{N}^*)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (|q|<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}c=c$ với c là hằng số.
- Vận dụng được các phép toán giới hạn dãy số để tìm giới hạn của một số dãy số đơn giản (ví dụ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n}$).
- Tính được tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng được kết quả đó để giải quyết một số tình huống thực tiễn giả định hoặc liên quan đến thực tiễn.
- Nhận biết được khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số, giới hạn hữu hạn một phía của hàm số tại một điểm.
- Nhận biết được khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực và mô tả được một số giới hạn cơ bản như: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$ với c là hằng số và k là số nguyên dương.
- Nhận biết được khái niệm giới hạn vô cực (một phía) của hàm số tại một điểm và hiểu được một số giới hạn cơ bản như: $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$.
- Tính được một số giới hạn hàm số bằng cách vận dụng các phép toán trên giới hạn hàm số.

- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giới hạn hàm số.
- Nhận dạng được hàm số liên tục tại một điểm, hoặc trên một khoảng, hoặc trên một đoạn.
- Nhận dạng được tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục.
- Nhận biết được tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản (như hàm đa thức, hàm phân thức, hàm căn thức, hàm lượng giác) trên tập xác định của chúng.

4. *Hàm số mũ và hàm số lôgarit*

- Nhận biết được khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên của một số thực khác 0; luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực của một số thực dương.
- Giải thích được các tính chất của phép tính luỹ thừa với số mũ nguyên, luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực.
- Sử dụng được tính chất của phép tính luỹ thừa trong tính toán các biểu thức số và rút gọn các biểu thức chứa biến (tính viết và tính nhẩm, tính nhanh một cách hợp lí).
- Tính được giá trị biểu thức số có chứa phép tính luỹ thừa bằng sử dụng MTCT.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với phép tính luỹ thừa (ví dụ: bài toán về lãi suất, sự tăng trưởng, ...).
- Nhận biết được khái niệm lôgarit cơ số a ($a > 0$, $a \neq 1$) của một số thực dương.
- Giải thích được các tính chất của phép tính lôgarit nhờ sử dụng định nghĩa hoặc các tính chất đã biết trước đó.
- Sử dụng được tính chất của phép tính lôgarit trong tính toán các biểu thức số và rút gọn các biểu thức chứa biến (tính viết và tính nhẩm, tính nhanh một cách hợp lí).
- Tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) của lôgarit bằng cách sử dụng MTCT.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với phép tính lôgarit (ví dụ: bài toán liên quan đến độ pH trong Hoá học, ...).
- Nhận biết được hàm số mũ và hàm số lôgarit. Nêu được một số ví dụ thực tế về hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- Nhận dạng được đồ thị của các hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- Giải thích được các tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit thông qua đồ thị của chúng.

- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với hàm số mũ và hàm số lôgarit (ví dụ: lãi suất, sự tăng trưởng, ...).
- Giải được phương trình, bất phương trình mũ, lôgarit ở dạng đơn giản (ví dụ: $2^{x+1} = \frac{1}{4}$; $2^{x+1} = 2^{3x+5}$; $\log_2(x+1) = 3$; $\log_3(x+1) = \log_2(x^2-1)$).
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit (ví dụ: bài toán liên quan đến độ pH, độ rung chấn, ...).

5. *Đạo hàm*

- Nhận biết được một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm như: xác định vận tốc tức thời của một vật chuyển động không đều, xác định tốc độ thay đổi của nhiệt độ.
- Nhận biết được định nghĩa đạo hàm. Tính được đạo hàm của một số hàm đơn giản bằng định nghĩa.
- Nhận biết được ý nghĩa hình học của đạo hàm.
- Thiết lập được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị.
- Nhận biết được số e thông qua bài toán mô hình hoá lãi suất ngân hàng.
- Tính được đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản (như hàm đa thức, hàm căn thức đơn giản, hàm số lượng giác, hàm số mũ, hàm số lôgarit).
- Sử dụng được các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số và đạo hàm của hàm hợp.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với đạo hàm (ví dụ: xác định vận tốc tức thời của một vật chuyển động không đều, ...).
- Nhận biết được khái niệm đạo hàm cấp hai của một hàm số.
- Tính được đạo hàm cấp hai của một số hàm số đơn giản.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với đạo hàm cấp hai (ví dụ: xác định gia tốc từ đồ thị vận tốc theo thời gian của một chuyển động không đều, ...).

6. *Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian*

- Nhận biết được các quan hệ liên thuộc cơ bản giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.

- Mô tả được ba cách xác định mặt phẳng (qua ba điểm không thẳng hàng; qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó; qua hai đường thẳng cắt nhau).
- Xác định được giao tuyến của hai mặt phẳng; giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.
- Vận dụng được các tính chất về giao tuyến của hai mặt phẳng; giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng vào giải bài tập.
- Nhận biết được hình chóp, hình tứ diện.
- Vận dụng được kiến thức về đường thẳng, mặt phẳng trong không gian để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

7. *Quan hệ song song trong không gian. Phép chiếu song song*

- Nhận biết được vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian: hai đường thẳng trùng nhau, song song, cắt nhau, chéo nhau trong không gian.
- Giải thích được tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song trong không gian.
- Vận dụng được kiến thức về hai đường thẳng song song để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Nhận biết được đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Giải thích được điều kiện để đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Giải thích được tính chất cơ bản về đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Vận dụng được kiến thức về đường thẳng song song với mặt phẳng để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Nhận biết được hai mặt phẳng song song trong không gian.
- Giải thích được điều kiện để hai mặt phẳng song song.
- Giải thích được tính chất cơ bản về hai mặt phẳng song song.
- Giải thích được định lí Thalès trong không gian.
- Giải thích được tính chất cơ bản của lăng trụ và hình hộp.
- Vận dụng được kiến thức về quan hệ song song để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Nhận biết được khái niệm và các tính chất cơ bản về phép chiếu song song.
- Xác định được ảnh của một điểm, một đoạn thẳng, một tam giác, một đường tròn qua một phép chiếu song song.
- Vẽ được hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản.
- Sử dụng được kiến thức về phép chiếu song song để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

8. *Quan hệ vuông góc trong không gian. Phép chiếu vuông góc*

- Nhận biết được khái niệm góc giữa hai đường thẳng trong không gian.
- Nhận biết được hai đường thẳng vuông góc trong không gian.
- Chứng minh được hai đường thẳng vuông góc trong không gian trong một số trường hợp đơn giản.
- Sử dụng được kiến thức về hai đường thẳng vuông góc để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Nhận biết được đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- Xác định được điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- Giải thích được định lí ba đường vuông góc.
- Giải thích được mối liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.
- Nhận biết được khái niệm phép chiếu vuông góc.
- Xác định được hình chiếu vuông góc của một điểm, một đường thẳng, một tam giác.
- Nhận biết được công thức tính thể tích của hình chóp, hình lăng trụ, hình hộp.
- Tính được thể tích của hình chóp, hình lăng trụ, hình hộp trong những trường hợp đơn giản (ví dụ: nhận biết được đường cao và diện tích mặt đáy của hình chóp).
- Vận dụng được kiến thức về đường thẳng vuông góc với mặt phẳng để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Nhận biết được hai mặt phẳng vuông góc trong không gian.
- Xác định được điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.
- Giải thích được tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc.
- Giải thích được tính chất cơ bản của hình lăng trụ đứng, lăng trụ đều, hình hộp đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình chóp đều.
- Vận dụng được kiến thức về hai mặt phẳng vuông góc để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Xác định được khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng; khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng song song; khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song; khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song trong những trường hợp đơn giản.

- Nhận biết được đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau; tính được khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong những trường hợp đơn giản (ví dụ: có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng còn lại).
- Sử dụng được kiến thức về khoảng cách trong không gian để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Nhận biết được khái niệm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- Xác định và tính được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong những trường hợp đơn giản (ví dụ: đã biết hình chiếu vuông góc của đường thẳng lên mặt phẳng).
- Nhận biết được khái niệm góc nhị diện, góc phẳng nhị diện.
- Xác định và tính được số đo góc nhị diện, góc phẳng nhị diện trong những trường hợp đơn giản (ví dụ: nhận biết được mặt phẳng vuông góc với cạnh nhị diện).
- Sử dụng được kiến thức về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc nhị diện để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.
- Nhận biết được hình chóp cụt đều.
- Tính được thể tích khối chóp cụt đều.
- Vận dụng được kiến thức về hình chóp cụt đều để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

9. *Phân tích và xử lí dữ liệu*

- Tính được các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm: số trung bình cộng (hay số trung bình), trung vị (median), tứ phân vị (quartiles), mốt (mode).
- Hiểu được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn.
- Rút ra được kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản.
- Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 11 và trong thực tiễn.

10. *Khái niệm về xác suất*

Nhận biết được một số khái niệm về xác suất cổ điển: hợp và giao các biến cố; biến cố độc lập.

11. *Các quy tắc tính xác suất*

- Tính được xác suất của biến cố hợp bằng cách sử dụng công thức cộng.

- Tính được xác suất của biến cố giao bằng cách sử dụng công thức nhân (cho trường hợp biến cố độc lập).
- Tính được xác suất của biến cố trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp tổ hợp.
- Tính được xác suất trong một số bài toán đơn giản bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây.

12. *Hoạt động thực hành và trải nghiệm*

Tổ chức cho HS một số hoạt động sau và có thể bổ sung các hoạt động khác tuỳ vào điều kiện cụ thể:

- Thực hành ứng dụng các kiến thức toán học vào thực tiễn và các chủ đề liên môn, chẳng hạn: Thực hành tổng hợp các hoạt động liên quan đến tính toán, đo lường, ước lượng và vận dụng các kiến thức hình học không gian vào đồ hoạ, vẽ kĩ thuật, như: vận dụng kiến thức về hàm số lượng giác vào tìm hiểu hệ thống hướng dẫn cất cánh và hạ cánh của máy bay, tìm hiểu hệ thống xác định phần tử bắn của pháo binh, tên lửa; vận dụng kiến thức về xác suất thống kê để giải thích các quy luật di truyền học; vận dụng các kiến thức hình học không gian vào đồ hoạ, vẽ kĩ thuật và thiết kế trong công nghệ.
- Thực hành ứng dụng các kiến thức toán học vào lĩnh vực Giáo dục dân số, chẳng hạn: vận dụng cấp số cộng, cấp số nhân để giải thích quy luật tăng trưởng dân số; vận dụng hàm số mũ, hàm số lôgarit để giải thích ảnh hưởng của sự tăng trưởng dân số tới tiến bộ kinh tế – xã hội, giải thích mối liên hệ giữa sự tăng trưởng dân số với môi trường sinh thái, ...
- Tìm hiểu một số kiến thức về tài chính, như:
  - Thực hành lên kế hoạch và quản lí thu nhập và tích luỹ của cải trong khoảng thời gian ngắn hạn và trung hạn.
  - Xác định được các phương thức để bảo vệ bản thân khỏi rủi ro.
- Tổ chức các hoạt động ngoài giờ chính khoá: câu lạc bộ toán học; cuộc thi về Toán, dự án học tập, ra báo tường (hoặc nội san) về Toán, như: câu lạc bộ về ứng dụng toán học trong khoa học máy tính và công nghệ thông tin, ...
- (Nếu nhà trường có điều kiện thực hiện): Tổ chức giao lưu học sinh giỏi Toán trong trường và trường bạn, giao lưu với các chuyên gia nhằm hiểu rõ hơn về vai trò của Toán học trong thực tiễn và trong các ngành nghề.

B GIỚI THIỆU SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 11

I Quan điểm biên soạn sách giáo khoa Toán 11

1. *SGK Toán 11 được biên soạn nhằm đáp ứng các yêu cầu chung đối với SGK mới*:

- Tuân thủ định hướng đổi mới giáo dục phổ thông với trọng tâm là chuyển nền giáo dục từ chú trọng truyền thụ kiến thức sang giúp HS hình thành, phát triển toàn diện phẩm chất và năng lực.
- Bám sát các tiêu chuẩn SGK mới theo Thông tư số 33/2017 của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 22 tháng 12 năm 2017.

2. *Tư tưởng chủ đạo trong SGK được thể hiện rõ từ cấu trúc của sách đến cách tiếp cận các nội dung giáo dục*:

- Đổi mới SGK theo mô hình phát triển phẩm chất và năng lực của HS nhưng không xem nhẹ vai trò của kiến thức. Kiến thức và kĩ năng là hai nhân tố quan trọng để phát triển phẩm chất và năng lực của HS; đồng thời chúng có quan hệ mật thiết với nhau: có kiến thức thì mới hình thành và phát triển được kĩ năng; ngược lại, có rèn luyện và nâng cao kĩ năng thì kiến thức mới được củng cố và phát triển sâu sắc.
- Kiến thức toán không chỉ phát triển từ chính Toán học mà quan trọng hơn, còn bắt nguồn từ cuộc sống và phục vụ cho cuộc sống.
- Nội dung và phương pháp giáo dục phải phù hợp với đặc điểm tâm lí và trải nghiệm của HS lớp 11.
- Các năng lực chung và năng lực toán học có quan hệ liên kết, gắn bó, hỗ trợ lẫn nhau, cùng nhau phát triển. Do đó, bên cạnh các năng lực vốn đã được coi trọng như năng lực tư duy lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học, không thể xem nhẹ các năng lực như: năng lực giao tiếp toán học (đọc, nghe, viết, diễn đạt các nội dung toán học), năng lực tự học, năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.

Nội dung Toán 11 phải bảo đảm tính tích hợp nội môn và liên môn, tính phân hoá trong giáo dục và hỗ trợ tốt cho GV trong việc đổi mới phương pháp dạy học.

II Cấu trúc nội dung

SGK *Toán 11* được chia làm hai tập, tương ứng với hai học kì, mỗi tập gồm các chương đan xen ba mạch kiến thức Đại số và Giải tích, Hình học và Đo lường, Thống kê và Xác suất. Với cấu trúc này, trong mỗi giai đoạn học tập, HS được tập trung vào một chủ đề, tạo thuận lợi cho các em trong việc tiếp thu, rèn luyện, khắc sâu kiến thức và kĩ năng;

mặt khác, sau mỗi giai đoạn, các em được chuyển sang một chủ đề mới, với cảm hứng học tập mới.

TẬP MỘT	TẬP HAI
Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác	Chương VI. Hàm số mũ và hàm số lôgarit
Chương II. Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân	Chương VII. Quan hệ vuông góc trong không gian
Chương III. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm	Chương VIII. Các quy tắc tính xác suất
Chương IV. Quan hệ song song trong không gian	Chương IX. Đạo hàm
Chương V. Giới hạn. Hàm số liên tục	Hoạt động thực hành trải nghiệm
Hoạt động thực hành trải nghiệm	Bài tập cuối năm

III Cấu trúc bài học

1. *Thiết kế bài học được xác định là yếu tố quan trọng nhất trong việc hỗ trợ GV đổi mới phương pháp giảng dạy và giúp HS phát triển năng lực và phẩm chất.*

- Bên cạnh các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực được thể hiện xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập, các phẩm chất khác như yêu nước, nhân ái, ... cũng được chú ý trong việc lựa chọn mô hình, chất liệu, cách thể hiện nội dung.
- Bên cạnh các năng lực tư duy và lập luận toán học, giao tiếp toán học, sử dụng công cụ và phương tiện học toán, các năng lực giải quyết vấn đề toán học, mô hình hoá toán học được chú ý thoả đáng và là một trong những điểm khác biệt lớn so với sách giáo khoa trước đây.
- Cấu trúc của các bài học trong SGK Toán 11 tạo điều kiện cho GV vận dụng sáng tạo các phương pháp và hình thức tổ chức dạy học, lấy hoạt động của HS làm trung tâm; tạo cơ hội và khuyến khích HS tích cực, chủ động, sáng tạo trong học tập.
- Các bài học được xây dựng theo hướng cho HS đi từ các vấn đề của cuộc sống đến các khái niệm, định lí toán học, sau đó, từ những hiểu biết toán học quay lại giải quyết các vấn đề của cuộc sống, thể hiện rõ thông điệp "Kết nối tri thức với cuộc sống" của bộ sách.

2. *Mỗi bài học trong SGK Toán 11 gồm có bốn thành phần cơ bản là mở đầu, kiến thức mới, luyện tập, vận dụng. Tuy vậy, trong khi phần mở đầu dành chung cho toàn bài học, các phần còn lại đi theo các mục trong bài học.*

- Phần đầu mỗi bài học là *Tên bài học* và *Phần định hướng*, gồm hai ô là ô Thuật ngữ và ô Kiến thức, kĩ năng. Phần định hướng này giúp HS xác định một cách nhanh chóng những khái niệm cơ bản, những kiến thức, kĩ năng cơ bản cần đạt được sau mỗi bài học.
- *Mở đầu* bài học đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập, nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập để mở ra một chân trời tri thức.
- Sau mở đầu, bài học được chia thành các mục, mỗi mục gồm một hoặc một vài đơn vị kiến thức. Trong mỗi mục, vòng lặp "hoạt động hình thành kiến thức, khung kiến thức, ví dụ, luyện tập" được chạy theo từng đơn vị kiến thức. Hoạt động vận dụng (vào các vấn đề mang tính thực tế) được đưa ra khi HS đã đạt được một lượng kiến thức, kĩ năng cần thiết, và thường được đưa ra ở cuối mục.
- Hoạt động *Hình thành kiến thức* giúp HS quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để có ý niệm sơ bộ về khái niệm, cơ sở trải nghiệm và cơ sở lí luận cho kết luận, từ đó, đi đến khung kiến thức. Các tác giả đã thiết kế các hoạt động hình thành kiến thức với các cách thức khác nhau, để HS đến với tri thức một cách chủ động nhất, tự nhiên nhất, vững chắc nhất có thể. Các hoạt động được chia thành từng bước để vừa sức với HS trong khoảng thời gian cho phép.
- *Khung kiến thức* (xuất hiện chủ yếu sau các hoạt động, và đôi khi sau Ví dụ) trình bày các kiến thức mang tính lí thuyết của bài học; HS sau đó được sử dụng (trừ khi có yêu cầu rõ chứng minh trong phần bài tập).
- HS có thể học ở các *Ví dụ* về phương pháp và cách trình bày, từ đó, thực hành các *Luyện tập* để củng cố kiến thức và kĩ năng.
- Trong các vòng lặp nói trên, trong SGK Toán 11, còn có thể xuất hiện các *Câu hỏi* (thường ở ngay sau khung kiến thức), *Chú ý*, *Nhận xét*, *Trải nghiệm* (nhỏ, nhanh, gọn), *Khám phá* (nhỏ), *Thảo luận* (nhanh). Các thành phần này không thuộc vào cấu trúc cứng, chúng chỉ xuất hiện khi cần thiết. Cấu trúc "động" này giúp các bài học trở nên đa dạng hơn và không cứng nhắc. Không chỉ làm cho bài học thêm sinh động, giúp HS có thêm cơ hội củng cố kiến thức, kĩ năng; các cấu phần "động" này còn góp phần giúp các em sáng tạo trong học tập, phát triển về nhận thức khoa học, khả năng lập luận, diễn giải, thuyết phục, kĩ năng làm việc theo nhóm, ...

- Các *Vận dụng* (mang tính thực tế) được đưa ra để HS giải quyết (bao gồm cả tình huống được nêu ra ở đầu bài học) sau khi đã được trau dồi kiến thức và kĩ năng. Hoạt động này giúp HS phát triển năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học: xác định mô hình toán học trong bài toán thực tế; giải quyết bài toán toán học; thể hiện, đánh giá ngược trở lại từ kết quả toán học sang kết quả thực tế.
- Cuối mỗi bài học là phần *Bài tập* (được chọn lọc để có số lượng vừa phải) để HS tiếp tục củng cố, rèn luyện kiến thức và kĩ năng ở nhà.
- Mục *Em có biết?* cung cấp ngắn gọn cho HS những câu chuyện, thông tin bổ ích và thú vị liên quan tới nội dung học.

3. *SGK Toán 11 được thiết kế theo hướng GV là người chỉ đạo, tổ chức, giám sát, kiểm tra, gợi ý, giảng giải, chốt kiến thức, kĩ năng; HS tích cực tham gia vào các* ***hoạt động để hình thành, củng cố và phát triển kiến thức, kĩ năng, học đến đâu vững tới đó.***

Tuỳ từng hoạt động, tuỳ vào hoàn cảnh thực tế lớp học, GV chủ động, linh hoạt trong hoạt động dạy và học trên lớp. Chẳng hạn, GV chủ động lựa chọn hình thức (thực hiện theo nhóm, hay cá nhân, gọi lên bảng, hay trả lời trực tiếp, kiểm tra chéo hay báo cáo kết quả trực tiếp với GV), chủ động chọn thời điểm, mức độ tương tác với HS (khi nào đưa ra các gợi ý, hỗ trợ, mức độ hỗ trợ tới đâu, ...).

Về cơ bản, chức năng của các cấu phần chính trong mỗi bài học là như sau:

Chức năng	Cấu phần	Đặc điểm
Khởi động	Tình huống mở đầu bài học	Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập, thường là một bài toán thực tế đại diện hay đôi khi là một đoạn dẫn nhập
Hình thành kiến thức, kĩ năng	Hoạt động hình thành kiến thức	Giúp HS khám phá kiến thức thông qua các hoạt động được chia thành từng bước vừa sức, để đi đến Khung kiến thức
	Khung kiến thức	Trình bày các kiến thức mang tính lí thuyết của bài học mà HS sau đó được phép sử dụng
	Ví dụ	HS có thể học ở các ví dụ về phương pháp và cách trình bày để hình thành và rèn luyện kĩ năng tương ứng.

Củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng	Luyện tập	Rèn luyện kĩ năng cơ bản gắn với đơn vị kiến thức đang học; tình huống tương tự ví dụ trước đó, để HS tự luyện tập trên lớp.
	Thực hành (Góc công nghệ, Trải nghiệm, ...)	Rèn luyện kĩ năng sử dụng các công cụ, phương tiện học toán.
Phát triển kiến thức, nâng cao kĩ năng, phát triển năng lực	Vận dụng	Vận dụng mang tính thực tế được đưa ra để HS giải quyết sau khi đã trau dồi kiến thức và kĩ năng. Giúp HS phát triển năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Củng cố, phát triển kĩ năng, năng lực	Bài tập cuối bài	Được chọn lọc để có số lượng vừa phải, bảo đảm tính phân hoá; chú trọng các bài tập liên quan đến ứng dụng của toán học trong thực tế và trong các môn học liên quan như Vật lí, Hoá học, Sinh học.

IV Phân bổ thời lượng trong sách giáo khoa Toán 11

Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018 (sau đây gọi tắt là Chương trình) quy định thời lượng Toán 11 gồm 105 tiết, phân bổ: 44% cho mạch Đại số và Giải tích, 35% cho mạch Hình học và Đo lường, 14% cho mạch Xác suất và Thống kê, 7% cho Thực hành và Trải nghiệm. Ngoài ra, Chương trình có thêm 35 tiết cho các chuyên đề học tập tự chọn.

Tuỳ thực tế, nhà trường linh hoạt trong việc phân bổ thời lượng cho từng bài học để đạt hiệu quả giáo dục. SGK Toán 11, đưa ra gợi ý sau đây về phân bổ thời lượng cho các bài học để nhà trường và GV tham khảo.

Tên chương	Tên bài	Số tiết
TẬP MỘT		
CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	Bài 1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác	3
	Bài 2. Công thức lượng giác	2
	Bài 3. Hàm số lượng giác	2
	Bài 4. Phương trình lượng giác cơ bản	2
	Bài tập cuối chương I	1

CHƯƠNG II. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN	Bài 5. Dãy số	2
	Bài 6. Cấp số cộng	2
	Bài 7. Cấp số nhân	2
	Bài tập cuối chương II	1
CHƯƠNG III. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	Bài 8. Mẫu số liệu ghép nhóm	1
	Bài 9. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm	2
	Bài tập cuối chương III	1
	Ôn tập, kiểm tra giữa kì I	3
CHƯƠNG IV. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	Bài 10. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	3
	Bài 11. Hai đường thẳng song song	3
	Bài 12. Đường thẳng và mặt phẳng song song	2
	Bài 13. Hai mặt phẳng song song	4
	Bài 14. Phép chiếu song song	2
	Bài tập cuối chương IV	1
CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	Bài 15. Giới hạn của dãy số	2
	Bài 16. Giới hạn của hàm số	2
	Bài 17. Hàm số liên tục	2
	Bài tập cuối chương V	1
HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM	Một vài áp dụng của Toán học trong tài chính	2
	Lực căng mặt ngoài của nước	2
	Ôn tập và kiểm tra cuối kì I	4
TẬP HAI		
CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	Bài 18. Luỹ thừa với số mũ thực	2
	Bài 19. Lôgarit	2
	Bài 20. Hàm số mũ và hàm số lôgarit	1
	Bài 21. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit	2
	Bài tập cuối chương VI	1

CHƯƠNG VII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN	Bài 22. Hai đường thẳng vuông góc	2
	Bài 23. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	3
	Bài 24. Phép chiếu vuông góc. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	2
	Bài 25. Hai mặt phẳng vuông góc	4
	Bài 26. Khoảng cách	3
	Bài 27. Thể tích	2
	Bài tập cuối chương VII	1
	Ôn tập, kiểm tra giữa kì II	3
CHƯƠNG VIII. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT	Bài 28. Biến cố hợp, biến cố giao, biến cố độc lập	3
	Bài 29. Công thức cộng xác suất	3
	Bài 30. Công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập	2
	Bài tập cuối chương VIII	1
CHƯƠNG IX. ĐẠO HÀM	Bài 31. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm	2
	Bài 32. Các quy tắc tính đạo hàm	3
	Bài 33. Đạo hàm cấp hai	1
	Bài tập cuối chương IX	1
HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM	Một vài mô hình toán học sử dụng hàm số mũ và hàm số lôgarit	1
	Hoạt động thực hành trải nghiệm Hình học	2
	Ôn tập và kiểm tra cuối năm	4

V Những điểm cần chú ý về nội dung Chương trình và SGK Toán 11

Chương trình môn Toán cấp Trung học phổ thông năm 2018 gồm ba mạch kiến thức:

Đại số và Giải tích, Hình học và Đo lường, Thống kê và Xác suất.

Đáng chú ý là các tác giả Chương trình đã nêu rõ quan điểm xây dựng Chương trình là: "CT GDPT môn Toán chỉ quy định những nguyên tắc, định hướng chung về yêu cầu cần đạt về phẩm chất và năng lực của HS, nội dung giáo dục, phương pháp giáo dục và việc đánh giá kết quả giáo dục, không quy định quá chi tiết, để tạo điều kiện cho các tác giả SGK và GV phát huy tính chủ động, sáng tạo trong thực hiện Chương trình."

Với quan điểm như vậy, khi thực hiện "một Chương trình – nhiều bộ SGK", thì khó tránh khỏi sự thiếu thống nhất về mặt chi tiết giữa các bộ SGK khác nhau. Do đó khi sử dụng bộ sách này, các GV cần nghiên cứu kĩ nội dung của từng chương, từng bài học sẽ được trình bày trong SGV Toán 11.

So với chương trình trước đây, nội dung CT GDPT môn Toán lớp 11 (năm 2018) và SGK Toán 11 có một số điểm đáng chú ý như sau:

1. Mạch Đại số và Giải tích

Về mặt nội dung, phần Đại số – Giải tích ở SGK Toán 11 mới vẫn bao gồm những nội dung truyền thống ở lớp 11 như *Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác*, *Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân*, *Đạo hàm* và một nội dung mới là *Hàm số mũ và hàm số lôgarit*.

– Nội dung *Lượng giác*: Được trình bày trọn vẹn ở lớp 11. Điều này khác biệt so với SGK theo Chương trình môn Toán năm 2006, là Lượng giác được trình bày ở cả lớp 10 (nội dung Giá trị lượng giác của góc lượng giác và Các công thức biến đổi) và lớp 11 (nội dung Hàm số lượng giác và Phương trình lượng giác). Theo quy định của Chương trình, không trình bày khái niệm cung lượng giác và chỉ xét cách giải các phương trình lượng giác cơ bản. Những phương trình lượng giác mẫu mực như phương trình bậc nhất đối với sin$x$ và cos$x$, phương trình chỉ chứa một hàm số lượng giác, phương trình đối xứng đối với sin$x$ và cos$x$, ... không có trong Chương trình; do đó cũng không được trình bày trong SGK.

– Nội dung *Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân*: Không có nhiều khác biệt lớn so với SGK Toán 11 cũ. Tuy nhiên, do quan điểm chung của Chương trình là "tinh giản, thiết thực", nên việc trình bày có giảm nhẹ đôi chút những yếu tố hàn lâm và nhấn mạnh đến ứng dụng. Chẳng hạn, không yêu cầu HS phải chứng minh chặt chẽ công thức tổng quát của cấp số cộng hay cấp số nhân bằng phương pháp quy nạp toán học (vì HS chỉ được học phương pháp quy nạp ở phần Chuyên đề học tập Toán 10, là phần lựa chọn của HS); không trình bày tường minh tính chất của cấp số cộng, cấp số nhân như một nội dung lí thuyết ở các bài học trong SGK (mà chỉ thiết kế thành một bài tập ở cuối chương); giảm nhẹ mức độ của những bài tập thuần tuý toán, nói riêng là những bài tập về việc xét tính tăng giảm hay bị chặn của dãy số (vì HS đại trà không được học cách chứng minh bất đẳng thức, phương pháp quy nạp toán học). Ngược lại, những bài tập ứng dụng thực tiễn liên quan đến dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân lại được chú trọng.

- Nội dung *Hàm số mũ và hàm số lôgarit*: Được đưa từ lớp 12 xuống lớp 11. Việc trình bày giảm nhẹ tính hàn lâm và nhấn mạnh đến ứng dụng. Chẳng hạn, các tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit như tập giá trị, tính chất biến thiên được nhận biết từ đồ thị tương ứng (giống như cách làm đối với hàm số bậc hai ở lớp 10); chỉ yêu cầu HS biết cách giải những phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit ở dạng cơ bản. Ngược lại, những ứng dụng của hàm số mũ và hàm số lôgarit trong thực tiễn lại được chú trọng.
- Nội dung *Đạo hàm*: Không có nhiều khác biệt so với trước đây, ngoại trừ việc trình bày cả công thức tính đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit (do các hàm số này đã được giới thiệu ở lớp 11). Giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán, nhấn mạnh đến ứng dụng thực tiễn.

2. Mạch Hình học và Đo lường

Trong Chương trình môn Toán năm 2018, nội dung Hình học không gian được trình bày trọn vẹn ở lớp 11, khác với trước đây là được trình bày một phần ở lớp 11 và một phần ở lớp 12. Do tinh thần chung của Chương trình môn Toán năm 2018 là "tinh giản, thiết thực" nên những nội dung hàn lâm, thuần tuý toán có xu hướng được giảm nhẹ và nhấn mạnh đến những ứng dụng thực tiễn của Hình học không gian. Cụ thể:

- Các nội dung Khối đa diện tổng quát và Mặt tròn xoay (như mặt cầu, mặt trụ, mặt nón), được trình bày trong SGK Hình học lớp 12 cũ (viết theo Chương trình môn Toán năm 2006), không được đề cập đến trong Chương trình môn Toán năm 2018. Do đó các nội dung này không có trong SGK Toán 11 và SGK Toán 12 mới, viết theo Chương trình mới 2018.
- So với Chương trình 2006, Chương trình 2018 có thêm phần về góc phẳng nhị diện, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau, và bỏ đi phần về vectơ trong không gian. Ở đây SGK Toán 11 mới trình bày quan hệ vuông góc trong không gian một cách trực tiếp bằng phương pháp tổng hợp của Hình học không gian, không thông qua vectơ trong không gian như các SGK Hình học 11 cũ.
- Một điểm khác biệt nữa trong SGK Toán 11 mới là tăng cường cho HS quan sát, trải nghiệm trước khi đi đến một số kết luận hình học. Giảm bớt các chứng minh thuần tuý toán học. Giảm bớt mức độ của các bài tập thuần tuý toán, bổ sung những bài tập vận dụng kiến thức hình học không gian vào thực tiễn (ở mức độ đơn giản).

GV cần lưu ý những đặc điểm trên khi giảng dạy để không bị vượt quá nội dung và yêu cầu cần đạt quy định trong Chương trình.

3. Mạch Thống kê và Xác suất

Trong Chương trình 2018 và SGK Toán mới, các nội dung Thống kê và Xác suất ở lớp 11 có thể coi là những nội dung tiếp nối của các nội dung tương ứng ở Toán 10. Cụ thể:

- Về Thống kê: Ở lớp 10 đã trình bày các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo độ phân tán của mẫu số liệu không ghép nhóm. Ở lớp 11 trình bày các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm; còn các số đặc trưng đo độ phân tán của loại mẫu số liệu này sẽ được trình bày ở lớp 12. Như vậy có thể coi Thống kê lớp 11 và lớp 12 là sự phát triển tiếp nội dung của Thống kê lớp 10. Những nội dung Thống kê ở lớp 11 và lớp 12 này là những nội dung mới so với Chương trình 2006.
- Về Xác suất: Ở lớp 10 đã trình bày định nghĩa xác suất cổ điển và cách tính xác suất cổ điển bằng phương pháp sơ đồ hình cây và phương pháp đếm của đại số tổ hợp. Ở lớp 11 trình bày tiếp các công thức tính xác suất, bao gồm công thức cộng xác suất và công thức nhân xác suất.

4. Nội dung Hoạt động thực hành và Trải nghiệm

- Đây là nội dung hoàn toàn mới so với Chương trình 2006 và SGK Toán 11 cũ. Phần này có thời lượng 7 tiết, chiếm 7% thời lượng của Chương trình môn Toán lớp 11. Mục đích của các hoạt động thực hành và trải nghiệm môn Toán này là tạo cơ hội để học sinh được trải nghiệm, vận dụng Toán học vào thực tiễn; tạo lập sự kết nối giữa các ý tưởng toán học, giữa Toán học với thực tiễn, giữa Toán học với các môn học và hoạt động giáo dục khác, đặc biệt là để thực hiện giáo dục STEM. Qua đó, góp phần hình thành và phát triển ở học sinh năng lực toán học, các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung theo các mức độ phù hợp theo quy định của Chương trình tổng thể.
- Để thuận lợi cho việc giảng dạy và học tập, SGK Toán 11 đã thiết kế sẵn một số chủ đề thực hành trải nghiệm gợi ý ở cuối mỗi tập sách. Tuỳ điều kiện, hoàn cảnh, GV lựa chọn các hoạt động phù hợp trong chuỗi các hoạt động được nêu ra trong SGK. Có một vài lưu ý khi tổ chức các hoạt động thực hành trải nghiệm môn Toán:
  - + Các chủ đề thiết kế trong SGK chỉ là gợi ý, GV có thể lựa chọn chủ đề khác phù hợp hơn với đặc điểm lớp học và cũng không nhất thiết thực hiện tất cả các hoạt động đưa ra trong SGK.
  - + Có thể tổ chức các hoạt động thực hành trải nghiệm vào tiết học bình thường trên lớp, trong buổi hoạt động ngoại khoá hoặc các buổi sinh hoạt chuyên đề của tổ chuyên môn.
  - + Khuyến khích phát triển các chủ đề thực hành trải nghiệm gợi ý trong SGK thành các chủ đề giáo dục STEM phù hợp.

C PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC VÀ ĐÁNH GIÁ KẾT QUẢ GIÁO DỤC

I Phương pháp dạy học

1. Phương pháp dạy học trong Chương trình môn Toán đáp ứng các yêu cầu cơ bản sau:

a) Phù hợp với tiến trình nhận thức của HS (đi từ cụ thể đến trừu tượng, từ dễ đến khó); không chỉ coi trọng tính lôgic của khoa học toán học mà cần chú ý cách tiếp cận dựa trên vốn kinh nghiệm và sự trải nghiệm của HS.

b) Quán triệt tinh thần "lấy người học làm trung tâm", phát huy tính tích cực, tự giác, chú ý nhu cầu, năng lực nhận thức, cách thức học tập khác nhau của từng cá nhân HS; tổ chức quá trình dạy học theo hướng kiến tạo, trong đó HS được tham gia tìm tòi, phát hiện, suy luận giải quyết vấn đề.

c) Linh hoạt trong việc vận dụng các phương pháp, kĩ thuật dạy học tích cực; kết hợp nhuần nhuyễn, sáng tạo với việc vận dụng các phương pháp, kĩ thuật dạy học truyền thống; kết hợp các hoạt động dạy học trong lớp học với hoạt động thực hành trải nghiệm, vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn. Cấu trúc bài học bảo đảm tỉ lệ cân đối, hài hoà giữa kiến thức cốt lõi, kiến thức vận dụng và các thành phần khác.

d) Sử dụng đủ và hiệu quả các phương tiện, thiết bị dạy học tối thiểu theo quy định đối với môn Toán; có thể sử dụng các đồ dùng dạy học tự làm phù hợp với nội dung học và các đối tượng HS; tăng cường sử dụng công nghệ thông tin và các phương tiện, thiết bị dạy học hiện đại một cách phù hợp và hiệu quả.

2. Định hướng phương pháp hình thành và phát triển các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung

a) Phương pháp hình thành, phát triển các phẩm chất chủ yếu

Thông qua việc tổ chức các hoạt động học tập, môn Toán góp phần cùng các môn học và hoạt động giáo dục khác giúp HS rèn luyện tính trung thực, tình yêu lao động, tinh thần trách nhiệm, ý thức hoàn thành nhiệm vụ học tập; bồi dưỡng sự tự tin, hứng thú học tập, thói quen đọc sách và ý thức tìm tòi, khám phá khoa học.

b) Phương pháp hình thành, phát triển các năng lực chung

- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực tự chủ và tự học thông qua việc rèn luyện cho người học biết cách lựa chọn mục tiêu, lập được kế hoạch học tập, hình thành cách tự học, rút kinh nghiệm và điều chỉnh để có thể vận dụng vào các tình huống khác trong quá trình học các khái niệm, kiến thức và kĩ năng toán học cũng như khi thực hành, luyện tập hoặc tự lực giải toán, giải quyết các vấn đề có ý nghĩa toán học.

- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực giao tiếp và hợp tác thông qua việc nghe hiểu, đọc hiểu, ghi chép, diễn tả được các thông tin toán học cần thiết trong văn bản toán học; thông qua sử dụng hiệu quả ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để trao đổi, trình bày được các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác, đồng thời thể hiện sự tự tin, tôn trọng người đối thoại khi mô tả, giải thích các nội dung, ý tưởng toán học.
- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo thông qua việc giúp HS nhận biết được tình huống có vấn đề; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác; biết đề xuất, lựa chọn được cách thức, quy trình giải quyết vấn đề và biết trình bày giải pháp cho vấn đề; biết đánh giá giải pháp đã thực hiện và khái quát hoá cho vấn đề tương tự.

3. Phương pháp dạy học môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực tính toán, năng lực ngôn ngữ và các năng lực đặc thù khác. Cụ thể:

a) Môn Toán với ưu thế nổi trội, có nhiều cơ hội để phát triển năng lực tính toán thể hiện ở chỗ vừa cung cấp kiến thức toán học, rèn luyện kĩ năng tính toán, ước lượng, vừa giúp hình thành và phát triển các thành tố của năng lực toán học (năng lực tư duy và lập luận, năng lực mô hình hoá, năng lực giải quyết vấn đề; năng lực giao tiếp và năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán).

b) Môn Toán góp phần phát triển năng lực ngôn ngữ thông qua rèn luyện kĩ năng đọc hiểu, diễn giải, phân tích, đánh giá tình huống có ý nghĩa toán học, thông qua việc sử dụng hiệu quả ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để trình bày, diễn tả các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học.

c) Môn Toán góp phần phát triển năng lực tin học thông qua việc sử dụng các phương tiện, công cụ công nghệ thông tin và truyền thông như công cụ hỗ trợ trong học tập và tự học; tạo dựng môi trường học tập trải nghiệm.

d) Môn Toán góp phần phát triển năng lực thẩm mĩ thông qua việc giúp HS làm quen với lịch sử toán học, với tiểu sử của các nhà toán học và thông qua việc nhận biết vẻ đẹp của Toán học trong thế giới tự nhiên.

II Đánh giá kết quả giáo dục

Mục tiêu đánh giá kết quả giáo dục môn Toán là cung cấp thông tin chính xác, kịp thời, có giá trị về sự phát triển năng lực và sự tiến bộ của HS trên cơ sở yêu cầu cần đạt ở mỗi lớp học, cấp học; điều chỉnh các hoạt động dạy học, bảo đảm sự tiến bộ của từng HS và nâng cao chất lượng giáo dục môn Toán nói riêng và chất lượng giáo dục nói chung.

Vận dụng kết hợp nhiều hình thức đánh giá (đánh giá quá trình, đánh giá định kì), nhiều phương pháp đánh giá (quan sát, ghi lại quá trình thực hiện, vấn đáp, trắc nghiệm khách quan, tự luận, kiểm tra viết, bài tập thực hành, các dự án/sản phẩm học tập, thực hiện nhiệm vụ thực tiễn, ...) vào những thời điểm thích hợp.

Đánh giá quá trình (hay đánh giá thường xuyên) do GV phụ trách môn học tổ chức, kết hợp với đánh giá của GV các môn học khác, của bản thân HS được đánh giá và của các HS khác trong tổ, trong lớp hoặc đánh giá của cha mẹ HS. Đánh giá quá trình đi liền với tiến trình hoạt động học tập của HS, tránh tình trạng tách rời giữa quá trình dạy học và quá trình đánh giá, bảo đảm mục tiêu đánh giá vì sự tiến bộ trong học tập của HS.

Đánh giá định kì (hay đánh giá tổng kết) có mục đích chính là đánh giá việc thực hiện các mục tiêu học tập. Kết quả đánh giá định kì và đánh giá tổng kết được sử dụng để chứng nhận cấp độ học tập, công nhận thành tích của HS. Đánh giá định kì do cơ sở giáo dục tổ chức hoặc thông qua các kì kiểm tra, đánh giá quốc gia.

Đánh giá định kì còn được sử dụng để phục vụ quản lí các hoạt động dạy học, bảo đảm chất lượng ở cơ sở giáo dục và phục vụ phát triển chương trình môn Toán.

Đánh giá năng lực HS thông qua các bằng chứng biểu hiện kết quả đạt được trong quá trình thực hiện các hành động của HS. Tiến trình đánh giá gồm các bước cơ bản như: xác định mục đích đánh giá; xác định bằng chứng cần thiết; lựa chọn các phương pháp, công cụ đánh giá thích hợp; thu thập bằng chứng; giải thích bằng chứng và đưa ra nhận xét.

Chú trọng việc lựa chọn phương pháp, công cụ đánh giá các thành tố của năng lực toán học. Cụ thể:

- Đánh giá năng lực tư duy và lập luận toán học: có thể sử dụng một số phương pháp, công cụ đánh giá như các câu hỏi (nói, viết), bài tập, ... mà đòi hỏi HS phải trình bày, so sánh, phân tích, tổng hợp, hệ thống hoá kiến thức; phải vận dụng kiến thức toán học để giải thích, lập luận.
- Đánh giá năng lực mô hình hoá toán học: lựa chọn những tình huống trong thực tiễn làm xuất hiện bài toán toán học. Từ đó, đòi hỏi HS phải xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị, ...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn; giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập; thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tiễn và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp.
- Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề toán học: có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nhận dạng tình huống, phát hiện và trình bày vấn đề cần giải quyết; mô tả, giải thích các thông tin ban đầu, mục tiêu, mong muốn của tình huống vấn đề đang

xem xét; thu thập, lựa chọn, sắp xếp thông tin và kết nối với kiến thức đã có; sử dụng các câu hỏi (có thể yêu cầu trả lời nói hoặc viết) đòi hỏi người học vận dụng kiến thức vào giải quyết vấn đề, đặc biệt các vấn đề thực tiễn; sử dụng phương pháp quan sát (như bảng kiểm theo các tiêu chí đã xác định), quan sát người học trong quá trình giải quyết vấn đề; đánh giá qua các sản phẩm thực hành của người học (chẳng hạn sản phẩm của các dự án học tập); quan tâm hợp lí đến các nhiệm vụ đánh giá mang tính tích hợp.

- Đánh giá năng lực giao tiếp toán học: có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nghe hiểu, đọc hiểu, ghi chép (tóm tắt), phân tích, lựa chọn, trích xuất được các thông tin toán học cơ bản, trọng tâm trong văn bản nói hoặc viết; sử dụng được ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường trong việc trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, thảo luận, tranh luận các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác.
- Đánh giá năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán: có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nhận biết được tên gọi, tác dụng, quy cách sử dụng, cách thức bảo quản, ưu điểm, hạn chế của các công cụ, phương tiện học toán; trình bày được cách sử dụng (hợp lí) công cụ, phương tiện học toán để thực hiện nhiệm vụ học tập hoặc để diễn tả những lập luận, chứng minh toán học.

Khi GV lên kế hoạch bài học, cần thiết lập các tiêu chí và cách thức đánh giá để bảo đảm ở cuối mỗi bài học, HS đạt được các yêu cầu cơ bản dựa trên các tiêu chí đã nêu, trước khi thực hiện các hoạt động học tập tiếp theo.

PHẦN HAI HƯỚNG DẪN CỤ THỂ

Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

Mục đích của chương này là xây dựng các khái niệm cơ bản của lượng giác như góc lượng giác, hệ thức Chasles, đường tròn lượng giác, giá trị lượng giác của góc lượng giác, các công thức biến đổi lượng giác như công thức cộng và một hệ quả của nó là công thức nhân đôi, công thức biến đổi tổng thành tích và công thức biến đổi tích thành tổng. Từ đó xây dựng các hàm số lượng giác cơ bản và trình bày cách giải các phương trình lượng giác cơ bản.

Những khái niệm và kết quả về lượng giác trong chương này vừa giúp xây dựng một loại hàm số mới trong chương trình Toán phổ thông là hàm số lượng giác, vừa giúp mô hình hoá và nghiên cứu các hiện tượng tuần hoàn trong Vật lí như dao động cơ, dòng điện xoay chiều,... Tính chất liên tục và đạo hàm của các hàm số lượng giác tiếp tục được trình bày trong các chương về Giải tích của Toán 11. Ngoài ra, khái niệm góc lượng giác cũng là mở rộng của khái niệm góc hình học quen thuộc ở trong Hình học phẳng, và cần sử dụng khi trình bày phép quay ở chuyên đề Phép biến hình trong mặt phẳng trong nội dung Toán lớp 11.

2 Cấu tạo chương

- Tổng thời lượng: 10 tiết.
- Nội dung:

  Bài 1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác (3 tiết)

  Bài 2. Công thức lượng giác (2 tiết)

  Bài 3. Hàm số lượng giác (2 tiết)

  Bài 4. Phương trình lượng giác cơ bản (2 tiết)

  Bài tập cuối chương I (1 tiết).

3 Một số điểm cần lưu ý

- Theo tinh thần chung của Chương trình GDPT môn Toán năm 2018 là giảm tính hàn lâm, một số nội dung lí thuyết của phần lượng giác đã được giảm nhẹ so với trước đây. Cụ thể, không trình bày tường minh công thức hạ bậc, công thức nhân ba và công thức biểu diễn qua tang của góc chia đôi; không yêu cầu HS dùng các phép biến đổi đồ thị (phép tịnh tiến, phép đối xứng qua gốc toạ độ, phép đối xứng qua trục tung) để vẽ đồ thị của hàm số lượng giác, mà chỉ yêu cầu HS vẽ đồ thị trên một đoạn có độ dài bằng chu kì (bằng cách lấy nhiều điểm trên đồ thị và nối lại), sau đó sẽ dùng cách tương tự để vẽ đồ thị trên các đoạn khác; các tính chất của hàm số lượng giác như tập giá trị, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến được suy ra từ đồ thị của các hàm số lượng giác; chỉ trình bày cách giải các phương trình lượng giác cơ bản. Ngoài ra, những bài tập thuần tuý toán như tính toán giá trị của các biểu thức, chứng minh các hệ thức, giải phương trình lượng giác được giảm nhẹ rất nhiều về mức độ so với trước đây.

  Bên cạnh việc giảm tính hàn lâm và giảm mức độ của các bài tập thuần tuý toán, một điểm mới nổi bật trong SGK Toán 11 mới này là những ứng dụng thực tế của lượng giác được đặc biệt chú trọng. Điều này thể hiện rất rõ trong những bài toán ở Tình huống mở đầu, Vận dụng và những bài tập thực tiễn trong SGK. Đây có thể coi là khác biệt cơ bản so với các SGK Toán THPT trước đây.

  Do quy định của Chương trình, một điểm khác biệt nữa của SGK Toán 11 mới là toàn bộ nội dung lượng giác được dạy trọn vẹn ở lớp 11, chứ không chia thành hai phần, một phần học ở lớp 10 và một phần học ở lớp 11 như trong các SGK Toán THPT cũ.

- Theo yêu cầu của Chương trình mới, HS nên được tham gia tích cực vào các hoạt động trong bài học, từ các hoạt động hình thành kiến thức mới đến các hoạt động luyện tập, vận dụng. SGK đã cố gắng thiết kế các hoạt động tương ứng. GV chỉ nên gợi ý, hướng dẫn cho HS (nếu cần) trong các hoạt động này, hạn chế việc làm thay (hoàn toàn) cho HS.

- Về hình thức dạy học:

  + Nếu có điều kiện thì GV nên chuẩn bị sẵn slides phần đề bài của các hoạt động. Đến hoạt động nào thì trình chiếu yêu cầu của hoạt động đó lên cho HS theo dõi và thực hiện. Việc này vừa tiết kiệm thời gian viết bảng, vừa sinh động hơn và làm HS tập trung hơn vào yêu cầu của GV.

  + Với mỗi hoạt động, có thể cho HS làm việc cá nhân hoặc hoạt động nhóm (tuỳ tính chất của hoạt động). Sau đó yêu cầu HS trình bày câu trả lời (bằng miệng, giơ bảng trả lời, viết bảng). GV nhận xét và tổng kết, đặc biệt lưu ý phương pháp giải và các sai lầm thường mắc.

  + Với các ví dụ đơn giản trong bài học, GV có thể để HS tự làm và chỉ gợi ý khi cần. Tuy nhiên, với các ví dụ phức tạp hơn, thì có thể xử lí tuỳ theo trình độ chung của HS trong lớp. Nếu ở lớp HS khá, GV chỉ cần phân tích đề bài, gợi ý để HS có thể tự làm sau đó sẽ nhận xét và tổng kết phương pháp giải. Còn ở lớp với trình độ chung của HS không tốt, GV có thể chữa mẫu và phân tích kĩ cách giải (theo lược đồ 4 bước của Polya). Sau đó yêu cầu HS làm các bài tập tương tự trong phần Luyện tập, Vận dụng, GV quan sát và trợ giúp HS khi cần.

– Trong mỗi bài học, các gợi ý dạy học và dự kiến thời gian tương ứng cho từng cấu phần của bài học chỉ là một phương án đề xuất. GV có thể dựa trên kinh nghiệm giảng dạy của mình và trình độ chung của HS trong lớp để có thể có phương án hợp lí hơn, miễn là đảm bảo mục tiêu của bài học và HS được tham gia tích cực vào các hoạt động.

Một đặc điểm của chương này (và cũng là đặc điểm chung của Toán 11) là nội dung dài và có rất nhiều khái niệm mới, trong đó có những khái niệm chỉ là khái niệm trung gian, dùng để định nghĩa những khái niệm khác quan trọng hơn. Để đảm bảo hình thức cấu trúc chung của SGK theo quy định và cung cấp thêm tư liệu cho GV, với mỗi đơn vị kiến thức trong SGK chúng tôi đều trình bày đầy đủ các cấu phần: Hoạt động hình thành kiến thức, Khung kiến thức, Ví dụ, Luyện tập và đôi khi có cả Vận dụng. Tuy nhiên, trong quá trình giảng dạy, để đảm bảo thời gian thực tế giảng dạy trên lớp, GV có thể lồng ghép các ví dụ minh hoạ và luyện tập chung cho các đơn vị kiến thức liên quan một cách phù hợp.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

– Nhận biết được các khái niệm cơ bản về góc lượng giác

– Nhận biết được khái niệm giá trị lượng giác của một góc lượng giác.

– Mô tả được bảng giá trị lượng giác của một số góc lượng giác thường gặp; hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác, quan hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt: bù nhau, phụ nhau, đối nhau, hơn kém nhau π.

- Sử dụng được MTCT để tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác khi biết số đo của góc đó.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện được năng lực mô hình hoá toán học thông qua các bài toán thực tiễn về bài toán di chuyển của trạm vũ trụ Quốc tế ISS (tình huống mở đầu), quãng đường đi của xe đạp, vận tốc (dài) và vận tốc góc của xe đạp (Bài tập 1.6)...; rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán về xác định góc lượng giác, số đo của góc lượng giác, ...; rèn luyện năng lực sử dụng các công cụ, phương tiện học toán thông qua việc sử dụng MTCT để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác.
- Bồi dưỡng được hứng thú học tập, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Ở bậc THCS, HS đã được làm quen với tỉ số lượng giác của góc nhọn thông qua các công thức cơ bản (sin; côsin; tang; côtang; ...). Ở đây HS sẽ được tìm hiểu sâu hơn về khái niệm của góc lượng giác và số đo của góc lượng giác. Bên cạnh đó HS sẽ được mở rộng các công thức lượng giác để ứng dụng trong tính toán các giá trị lượng giác của góc lượng giác và giải các bài tập có liên quan.
- Trong CT GDPT môn Toán năm 2018, so với trước đây, yêu cầu về bài toán gắn với thực tiễn của góc lượng giác và giá trị lượng giác của góc lượng giác được quan tâm nhiều hơn. GV cần lưu ý điều này khi giảng dạy và giao bài tập cho HS.
- Chuẩn bị: Ngoài những hình vẽ gợi ý trong SGK, GV có thể chuẩn bị thêm:
  + Tranh ảnh, hình vẽ một số vật thể hình tròn có liên quan đến góc lượng giác;
  + Nội dung, hình ảnh về bảng số đo lượng giác của các góc lượng giác;
  + Video giới thiệu lịch sử toán học liên quan tới lượng giác, nền văn minh của người Ai Cập cổ đại, Babylon, ... sử dụng lượng giác để tính toán trong thiên văn học.

III. GỢI Ý DẠY BÀI HỌC

1.Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết.

  + Tiết 1: Mục 1. Góc lượng giác; Mục 2. Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn.
  + Tiết 2: Mục 3. Giá trị lượng giác của góc lượng giác.
  + Tiết 3: Mục 4. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác. Chữa bài tập cuối bài.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

1. GÓC LƯỢNG GIÁC		
HOẠT ĐỘNG	**MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU**	**GỢI Ý THỰC HIỆN**
a) Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác		
HĐ1. Nhận biết khái niệm góc lượng giác	Đây là tình huống cho HS làm quen với các cách xác định một góc lượng giác, làm quen với chiều quay, làm quen với tia xác định góc lượng giác thông qua hình ảnh kim phút của đồng hồ.	HS hoàn thành hoạt động, sau đó rút ra nhận xét. *HD* a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}$; c) Có vô số cách quay. GV ghi bảng định nghĩa trong Khung kiến thức.
Quy ước: xác định góc lượng giác, chiều dương, chiều âm; số đo của góc lượng giác	Phần đọc hiểu này giúp HS làm quen với khái niệm góc lượng giác, tia đầu, tia cuối của góc lượng giác, chiều quay của góc lượng giác.	HS hoàn thành phần đọc hiểu dưới sự hướng dẫn của GV. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức. GV nên mô tả kĩ các hình vẽ minh hoạ để HS nhìn thấy rõ minh hoạ cho tia đầu, tia cuối của góc lượng giác, chiều quay của góc lượng giác.
Chú ý về sự sai khác số đo của các góc lượng giác	Phần chú ý này giúp HS nhận biết sự sai khác nhau một bội nguyên của 360° về số đo của các góc lượng giác.	GV ghi bảng nội dung Chú ý.
Ví dụ 1	Hướng dẫn HS cách xác định số đo của các góc lượng giác (phụ thuộc vào chiều quay và sai khác nhau một bội nguyên của 360°).	GV hướng dẫn HS cách xác định số đo của các góc lượng giác. GV nhắc lại nội dung chú ý nêu trên, trong đó nhấn mạnh đến chiều quay của góc lượng giác. GV trình bày mẫu lời giải Ví dụ 1 và giảng giải cho HS. HS rút ra nhận xét.

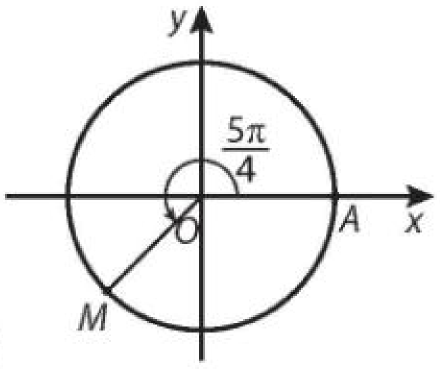
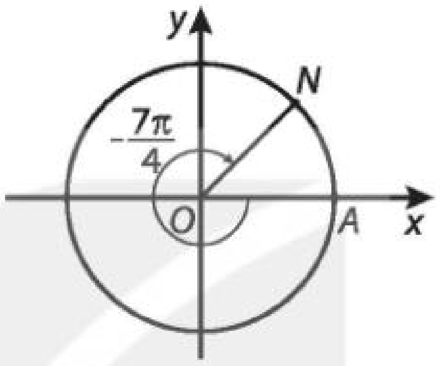
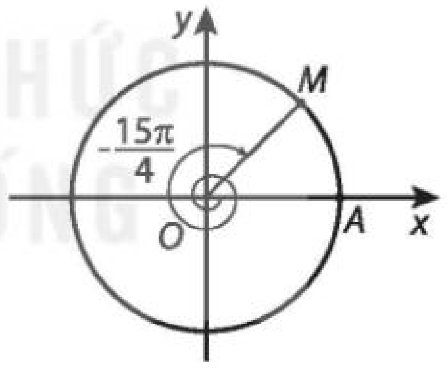
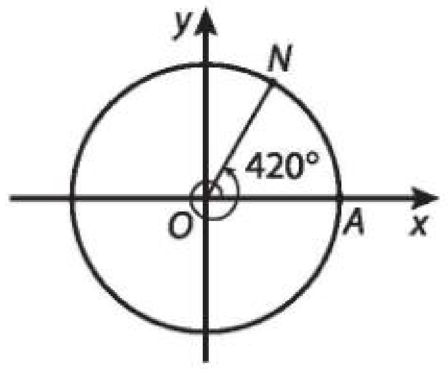
Luyện tập 1	HS luyện tập cách xác định số đo của các góc lượng giác (phụ thuộc vào chiều quay và sai khác nhau một bội nguyên của 360°).	GV hướng dẫn HS cách xác định số đo của các góc lượng giác. *HD* a) 45°; b) -315°.
b) Hệ thức Chasles		
HĐ2: Nhận biết hệ thức Chasles	Giúp HS nhận biết định nghĩa của hệ thức Chasles thông qua xác định số đo của các góc lượng giác (phụ thuộc vào chiều quay và sai khác nhau một bội nguyên của 360°).	HS hoàn thành hoạt động, sau đó rút ra nhận xét. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức và giải thích cho HS. *HD* a) $Sđ\left(Ou,Ov\right)=30^\circ$ $Sđ\left(Ov,Ow\right)=45^\circ$ $Sđ\left(Ou,Ow\right)=-285^\circ$. b) Vì $30^\circ+45^\circ=-285^\circ+1.360^\circ$ nên tồn tại $k=1$ sao cho $sđ\left(Ou,Ov\right)+sđ\left(Ov,Ow\right)$ $=sđ\left(Ou,Ow\right)+k.360^\circ$.
Nhận xét	Nội dung nhận xét đưa ra công thức để tính số đo của góc lượng giác dựa vào hệ thức Chasles.	GV ghi bảng Nhận xét.
Ví dụ 2	Áp dụng Nhận xét để tính số đo của góc lượng giác dựa vào hệ thức Chasles.	GV hướng dẫn HS áp dụng Nhận xét để tính số đo của góc lượng giác dựa vào hệ thức Chasles. GV trình bày mẫu lời giải Ví dụ 2 và giảng giải cho HS. HS rút ra nhận xét.
Luyện tập 2	HS luyện tập cách tính số đo của góc lượng giác dựa vào hệ thức Chasles.	GV hướng dẫn HS tính số đo của góc lượng giác dựa vào hệ thức Chasles.

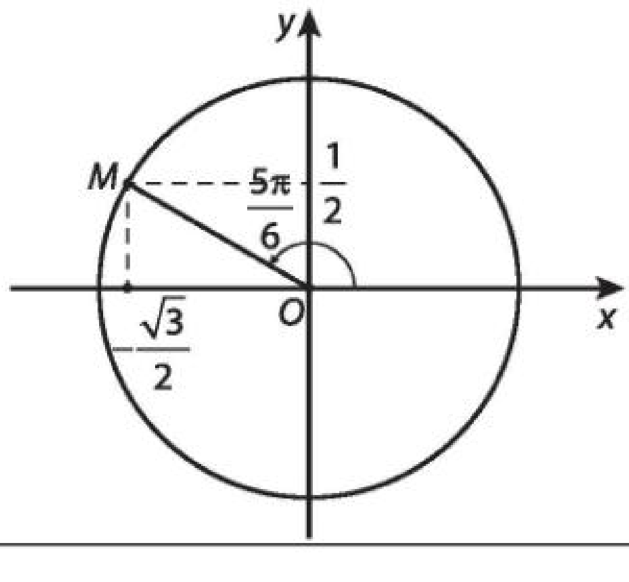
		HD $\text{sđ}(Ou,Ov)$ $= \text{sđ}(Ox,Ov) - \text{sđ}(Ox,Ou) + k.360^\circ$ $= -270^\circ - 240^\circ + k.360^\circ$ $= -510^\circ + k.360^\circ.$
2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN		
a) Đơn vị đo góc và cung tròn		
Nhắc lại đơn vị độ	Nhắc lại kiến thức về đơn vị đo độ.	GV nhắc lại kiến thức.
Phần đọc hiểu giới thiệu đơn vị rađian	Thiết lập khái niệm về đơn vị rađian.	HS hoàn thành phần đọc hiểu dưới sự hướng dẫn của GV.
Khái niệm đơn vị rađian	Giới thiệu về đơn vị rađian.	GV giảng và ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức.
Quan hệ giữa độ và rađian	Giúp HS thiết lập công thức thể hiện mối quan hệ giữa độ và rađian.	GV giảng và ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 3	Hướng dẫn HS cách đổi đơn vị từ độ sang rađian. Hướng dẫn HS cách đổi đơn vị từ rađian sang độ.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS lên bảng, nhận xét bài làm.
Luyện tập 3		HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS lên bảng, nhận xét bài làm. *HD* a) Đổi từ độ sang rađian $360^\text{o} = 360 \cdot \frac{\pi}{180} = 2\pi;$ $-450^\text{o} = -450 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5\pi}{2}$ b) Đổi từ rađian sang độ $3\pi = 3\pi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\text{o} = 540^\text{o};$ $-\frac{11\pi}{5} = -\frac{11\pi}{5} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\text{o} = -396^\text{o}.$ GV giới thiệu bảng chuyển đổi thông dụng giữa số đo độ và số đo rađian

		của các góc đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180°.
b) Độ dài cung tròn		
HĐ3. Xây dựng công thức tính độ dài cung tròn	Hướng dẫn HS xác định độ dài cung tròn có số đo bằng 1 rađian và từ đó xác định độ dài của cung tròn có số đo α rad. Từ đó rút ra kết luận công thức tính độ dài cung tròn.	GV hướng dẫn HS thực hiện HĐ. HS dựa vào kết quả chính xác để rút ra kết luận. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức. *HD* a) Độ dài cung tròn có số đo bằng 1 rađian là R. b) Độ dài của cung tròn có số đo α rad là αR.
Ví dụ 4	Hướng dẫn HS cách tính độ dài cung tròn.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm.
Vận dụng 1. Giải bài toán ở *Tình huống mở đầu*	Sử dụng công thức xác định độ dài cung tròn để giải bài toán ở tình huống mở đầu.	HS thực hiện theo hướng dẫn của GV. *HD*. Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R = 6\,400 + 400 = 6\,800$ (km). Đổi $45^{\circ} = 45 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{4}$. Vậy trạm ISS đã di chuyển một quãng đường có độ dài là $l = R\alpha = 6800 \cdot \dfrac{\pi}{4} \approx 5340{,}708$ $\approx 5\,341$(km).
Củng cố	Dành cho dự phòng, GV dặn dò HS công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC		
a) Đường tròn lượng giác		

HĐ4. Nhận biết khái niệm đường tròn lượng giác	HS nhận biết được hình dạng và khái niệm về đường tròn lượng giác.	GV vẽ (trình chiếu) hình vẽ về đường tròn lượng giác và giảng cho HS. Biểu diễn các điểm M trên đường tròn lượng giác với sđ(OA, OM) cho trước. a)  b) 
Ví dụ 5	HS biết sử dụng đường tròn lượng giác để biểu diễn góc lượng giác.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời và giải thích cách làm.
Luyện tập 4	Củng cố, nâng cao kĩ năng sử dụng đường tròn lượng giác để biểu diễn góc lượng giác.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời và giải thích cách làm. *HD* a)  b) 
b) Các giá trị lượng giác của góc lượng giác		
HĐ5. Hình thành khái niệm giá trị lượng giác cho các	HS nhắc lại khái niệm các giá trị lượng giác của góc α $(0^{o} \le \alpha \le 180^{o})$ đã học ở	GV gọi HS nhắc lại khái niệm giá trị lượng giác của góc α $(0° \le \alpha \le 180°)$ đã học ở lớp 10.

góc lượng giác bất kì trên đường tròn lượng giác thông qua việc nhắc lại khái niệm các giá trị lượng giác của góc α ($0^o \le \alpha \le 180^o$) đã học ở lớp 10.	lớp 10. Từ đó mở rộng khái niệm giá trị lượng giác cho các góc lượng giác có số đo tuỳ ý.	GV mở rộng khái niệm giá trị lượng giác cho các góc lượng giác bất kì trên đường tròn lượng giác. GV giới thiệu trục sin và trục côsin. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức.
Chú ý. Tập xác định, tập giá trị và dấu của các giá trị lượng giác của góc lượng giác.	HS nhận biết tập xác định, tập giá trị và dấu của các giá trị lượng giác của góc lượng giác.	Từ định nghĩa giá trị lượng giác của các góc lượng giác, đường tròn lượng giác, GV hướng dẫn HS đọc hiểu và ghi bảng các nội dung mục Chú ý.
Ví dụ 6	HS xác định được điểm biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Đồng thời rèn luyện kĩ năng tính giá trị lượng giác của góc lượng giác.	GV hướng dẫn HS cách xác định điểm biểu diễn góc lượng giác. Cách tính giá trị lượng giác của góc lượng giác trên đường tròn lượng giác GV trình bày mẫu và giảng giải cho HS.
Luyện tập 5	Củng cố kiến thức, nâng cao kĩ năng sử dụng đường tròn lượng giác để biểu diễn góc lượng giác và tính các giá trị lượng giác của một góc.	HS tự làm. GV gọi HS trả lời và giải thích cách làm. a) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo là $\frac{5\pi}{6}$ như ở hình dưới. b) Ta có: $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cot\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$.  y M $\frac{5\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$ O x $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt		
Bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt	HS nhớ được bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.	GV viết bảng (trình chiếu) bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt. GV có thể hướng dẫn cách nhớ Bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt bằng đường tròn lượng giác hoặc bằng MTCT.
d) Sử dụng MTCT để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác của góc		
Hướng dẫn sử dụng MTCT để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác của góc	HS tìm hiểu cách sử dụng MTCT để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác	GV hướng dẫn HS sử dụng MTCT để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác của góc. HS đọc hiểu và thực hành dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 7	HS biết sử dụng MTCT để tìm giá trị lượng giác	GV hướng dẫn HS cách sử dụng MTCT để tìm giá trị lượng giác của góc. GV trình bày mẫu và giảng giải cho HS.
Ví dụ 8	HS biết sử dụng MTCT để đổi số đo góc.	GV hướng dẫn HS cách sử dụng MTCT để đổi số đo góc. GV trình bày mẫu và giảng giải cho HS.
Luyện tập 6	Củng cố, nâng cao kĩ năng sử dụng MTCT để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác.	HS tự làm. GV gọi HS trả lời và giải thích cách làm. *Đáp số:* a) 0,2225; –0,7650; b) 3,1310; c) 44°33'48".
Chữa tập cuối bài	Mục đích của hoạt động này là cho HS làm bài tập để củng cố kiến thức đã học. Bài tập 1.1. Bài tập 1.2. Bài tập 1.3.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại kiến thức (GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học).
Củng cố	Dành cho dự phòng, GV dặn dò HS công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC		
a) Các công thức lượng giác cơ bản		
HĐ6	HS xây dựng các công thức lượng giác cơ bản dựa vào định nghĩa và ý nghĩa hình học của các giá trị lượng giác.	GV đưa ra vấn đề, gợi ý và yêu cầu HS giải quyết vấn đề đó. GV ghi bảng các công thức lượng giác cơ bản trong Khung kiến thức.
Ví dụ 9	HS hình thành kĩ năng vận dụng các công thức lượng giác cơ bản để tính các giá trị lượng giác khi biết một giá trị lượng giác bất kì của góc.	GV hướng dẫn HS cách vận dụng các công thức lượng giác cơ bản để tính các giá trị lượng giác còn lại khi đã biết một giá trị lượng giác của góc lượng giác. GV gọi HS trình bày và nhận xét về bài làm của HS.
Luyện tập 7	HS rèn luyện kĩ năng vận dụng các công thức lượng giác cơ bản để tính các giá trị lượng giác.	GV gọi HS trình bày và nhận xét về bài làm của HS. GV tổng kết lại lời giải. *HD.* Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$. Mặt khác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Do đó $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ và $\cot\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
b) Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt		
HĐ7. Nhận biết liên hệ giữa giá trị lượng giác của hai góc đối nhau	HĐ này giúp HS nhận biết mối liên hệ giữa giá trị lượng giác của hai góc đối nhau.	GV đưa ra vấn đề, gợi ý và yêu cầu HS giải quyết vấn đề đó. HS đọc hiểu và trả lời câu hỏi của GV. GV ghi lên bảng mối liên hệ giữa giá trị lượng giác của hai góc đối nhau.

Phần đọc hiểu và chú ý	HS đọc hiểu	GV nêu nội dung phần đọc hiểu và Chú ý; hướng dẫn HS cách vận dụng các công thức lượng giác của các góc liên quan đặc biệt vào việc tính giá trị của biểu thức.
Ví dụ 10	HS hình thành kĩ năng vận dụng các công thức lượng giác của các góc liên quan đặc biệt vào việc tính giá trị của biểu thức.	GV hướng dẫn HS cách vận dụng các công thức lượng giác của các góc liên quan đặc biệt vào việc tính giá trị của biểu thức. GV trình bày mẫu và giảng cho HS.
Luyện tập 8	HS rèn luyện kĩ năng vận dụng các công thức lượng giác của các góc liên quan đặc biệt vào việc tính giá trị của biểu thức.	GV cho HS thảo luận nhóm đôi, trình bày và nhận xét về bài làm của HS. GV tổng kết lại lời giải. *HD* a) $\sin(-675^\circ) = \sin\left[45^\circ + (-2)\cdot 360^\circ\right]$ $= \sin 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. b) $\tan\dfrac{15\pi}{4} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4} + 4\pi\right)$ $= \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{4} = -1$.

Vận dụng 2	Củng cố, nâng cao kĩ năng vận dụng các công thức lượng giác cơ bản, mối liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc đối nhau, hơn kém π để giải bài toán thực tiễn về huyết áp tâm trương.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời, giải thích cách làm.
		HD
		$B(t) = 80 + 7\sin\dfrac{\pi t}{12}$,
		a) $t = 6$; B(6) = 87 (mmHg);
		b) $t = 10{,}5$;
		$\mathrm{B}(10{,}5) = 80 + 7\sin\dfrac{7\pi}{8} \approx 80{,}3357$ (mmHg);
		c) $t = 12$; B(12) = 80 (mmHg);
		d) $t = 20$;
		$\mathrm{B}(20) = 80 - \dfrac{7\sqrt{3}}{2} \approx 73{,}9378$ (mmHg).

Chữa bài tập	HS làm bài tập để củng cố kiến thức đã học. Bài tập 1.6.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại kiến thức. (GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học).
Củng cố	Dành cho dự phòng, GV dặn dò HS bài tập về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

Chuyển đổi các số đo góc từ độ sang rađian và ngược lại: Bài tập 1.1;

Xác định độ dài cung tròn: Bài tập 1.2;

Xác định các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác: Bài tập 1.3;

Tính các giá trị lượng giác của một góc khi biết một giá trị lượng giác của góc đó: Bài tập 1.4;

Vận dụng các công thức lượng giác cơ bản để chứng minh đẳng thức lượng giác: Bài tập 1.5;

Bài toán thực tế liên quan đến góc lượng giác: Bài tập 1.6.

Tuỳ tình hình thực tế, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT để giao cho HS.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.1. Hoàn thành bảng:

Số đo độ	$15°$	$67,5°$	$0°$	$900°$	$-105°$	$-247,5°$
Số đo rađian	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{8}$	0	5π	$-\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{11\pi}{8}$

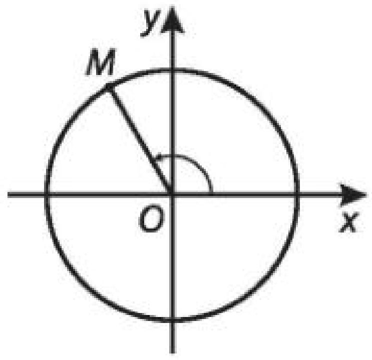
1.2. a) $l = 20 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{3} \approx 5,24$ (cm);

b) $l = 1,5 \cdot 20 = 30$ (cm);

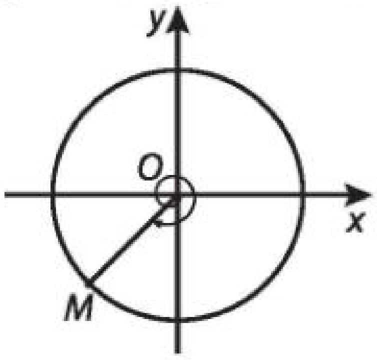
c) $l = \frac{35}{180}\pi \cdot 20 = \frac{35}{9}\pi \approx 12,22$ (cm);

d) $l = \frac{315}{180}\pi.20 = 35\pi \approx 109,96$ (cm).

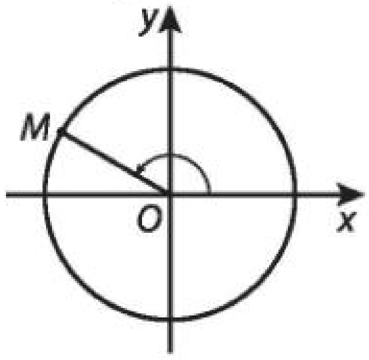
1.3. Điểm *M* biểu diễn các góc lượng giác được vẽ trong các hình sau:



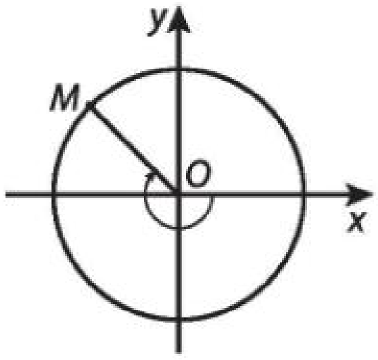
a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$



b) $\alpha = -\frac{11\pi}{4}$



c) $\alpha = 150°$



d) $\alpha = -225°$

1.4. a) Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha > 0$. Mặt khác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Suy ra $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Do đó $\tan\alpha = 2\sqrt{6}$ và $\cot\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

b) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$. Mặt khác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Suy ra $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do đó $\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ và $\cot\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$. Mặt khác $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Suy ra $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Do đó $\sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}$ và $\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

d) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0$. Mặt khác $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Suy ra $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. Do đó $\cos\alpha = \cot\alpha.\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $\tan\alpha = -\sqrt{2}$.

1.5. a) $\mathrm{VT} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \mathrm{VP}.$$

b) $\mathrm{VT} = \frac{\cos^2\alpha + \tan^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = \cot^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$$= \cot^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = -1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha = \mathrm{VP}$$

1.6. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Bánh xe của người đi xe đạp quay được $\frac{11}{5}$ vòng trong 1 giây. Do đó bánh xe quay được $\frac{11}{5}.360^\circ = 792^\circ$ hoặc $4,4\pi$ rađian trong 1 giây.

b) Trong 1 phút bánh xe quay được $\frac{11}{5}.60 = 132$ vòng. Vậy độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút là $132\ .680.\pi \approx 281\ 989$ (mm) = 281,989 (m).

Bài 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Mô tả được các phép biến đổi lượng giác cơ bản: công thức cộng; công thức góc nhân đôi; công thức biến đổi tích thành tổng và công thức biến đổi tổng thành tích.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác và các phép biến đổi lượng giác.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện được năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán vận dụng công thức lượng giác và các phép biến đổi lượng giác (Công thức cộng, Công thức nhân đôi, Công thức biến đổi tích thành tổng, Công thức biến đổi tổng thành tích);
- Bồi dưỡng được hứng thú học tập, ý thức tìm tòi, khám phá cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Ngoài các công thức lượng giác cơ bản đã được học trong Bài 1, HS sẽ được giới thiệu trong bài này các công thức lượng giác như Công thức cộng; Công thức nhân đôi; Công thức biến đổi tích thành tổng; Công thức biến đổi tổng thành tích và ứng dụng trong tính toán các giá trị lượng giác của góc lượng giác cũng như chứng minh các đẳng thức lượng giác, thực hiện các phép biến đổi lượng giác.
- Chuẩn bị: ngoài những hình vẽ gợi ý trong SGK, GV có thể chuẩn bị thêm:
  + Nội dung, hình ảnh dễ hiểu, dễ nhớ về các công thức lượng giác.

III. GỢI Ý DẠY BÀI HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian (2 tiết):

+ Tiết 1: Mục 1. Công thức cộng; Mục 2: Công thức nhân đôi.
+ Tiết 2: Mục 3. Công thức biến đổi tích thành tổng; Mục 4. Công thức biến đổi tổng thành tích. Chữa bài tập cuối bài.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

1. CÔNG THỨC CỘNG		
HOẠT ĐỘNG	**MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU**	**GỢI Ý THỰC HIỆN**
HĐ1. Nhận biết công thức cộng	Đây là tình huống cho HS nhận biết công thức cộng thông qua trường hợp cụ thể. Từ đó tổng quát hoá và tương tự để có được các công thức cộng cho các giá trị lượng giác khác nhau.	GV hướng dẫn HS hoàn thành hoạt động, sau đó rút ra nhận xét. *HD* a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$ $=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy với $a=\frac{\pi}{3}$ và $b=\frac{\pi}{6}$ ta thấy $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$. b) $\cos(a+b)=\cos\big(a-(-b)\big)$ $=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)$ $=\cos a\cos b-\sin a\sin b$. c) $\sin(a-b)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a-b)\right]$ $=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right]$.

		Ta có $\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right]$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$ $=\sin a\cos b-\cos a\sin b$. Vậy $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 1	Hướng dẫn HS cách áp dụng các công thức cộng để tính giá trị lượng giác của góc lượng giác.	GV nhắc lại nội dung công thức cộng cho côsin và tang; hướng dẫn HS giải VD1.
Ví dụ 2	Hướng dẫn HS cách biến đổi đẳng thức lượng giác để chứng minh vế phải bằng vế trái qua việc áp dụng công thức cộng.	GV nhắc lại nội dung công thức cộng cho sin và trình bày mẫu, hướng dẫn HS giải VD2.
Luyện tập 1	Củng cố cho HS cách áp dụng công thức cộng để chứng minh các đẳng thức lượng giác.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại kiến thức. *Gợi ý* a) $\mathrm{VT}=\sin x-\cos x$ $=\sqrt{2}(\sin x.\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$ $=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos x)$ $=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{VP}$; b) $\mathrm{VT}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$ $=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ $=\mathrm{VP}$.

Vận dụng 1. Giải bài toán trong tình huống mở đầu	Củng cố, nâng cao kĩ năng chứng minh biểu thức lượng giác qua việc áp dụng công thức cộng.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời, giải thích cách làm. *HD* Âm kết hợp là $f(t) = 5\sin t + 5\cos t$ $= 5(\sin t + \cos t) = 5\sqrt{2}\,\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right).$ Tức là, âm kết hợp là một sóng âm hình sin với biên độ âm $5\sqrt{2}$ và pha ban đầu $\dfrac{\pi}{4}$.
2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI		
HĐ2. Xây dựng công thức nhân đôi	Từ công thức cộng, HĐ này giúp HS chứng minh được công thức nhân đôi bởi trường hợp đặc biệt $b = a$.	GV hướng dẫn HS hoàn thành hoạt động, sau đó rút ra nhận xét. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 3	Hướng dẫn HS cách tính giá trị lượng giác của góc lượng giác bằng cách áp dụng công thức nhân đôi.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS lên bảng, nhận xét bài làm và giới thiệu công thức hạ bậc.
Luyện tập 2	Củng cố cho HS cách áp dụng công thức nhân đôi để tính giá trị lượng giác.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS lên bảng, nhận xét bài làm. *HD* Ta có $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1.$ Suy ra $2\cos^2\dfrac{\pi}{8} = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}.$ Do đó $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}.$ Vì $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$ nên $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

Chữa tập cuối bài	Mục đích của hoạt động này là cho HS làm bài tập để củng cố kiến thức đã học. Bài tập 1.7; Bài tập 1.8; Bài tập 1.9.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại kiến thức (GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học).
Củng cố	Dành cho dự phòng, GV dặn dò HS công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG		
HĐ3. Xây dựng công thức biến đổi tích thành tổng	Hướng dẫn HS từ công thức cộng để chứng minh được công thức biến đổi tích thành tổng.	GV hướng dẫn HS thực hiện HĐ. *HD* a) Từ các công thức $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, ta có $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$ $\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$. b) Từ các công thức $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$, ta có $\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 4	Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng để tính giá trị của các biểu thức lượng giác.	HS đọc hiểu dưới sự hướng dẫn của GV. GV ghi bảng lời giải và HD HS cách vận dụng công thức.

Luyện tập 3	Củng cố, nâng cao kĩ năng sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng để tính giá trị của các biểu thức lượng giác.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời, giải thích cách làm. *HD.* $A = \cos 75^{\circ}\cos 15^{\circ}$ $= \frac{1}{2}(\cos 90^{\circ} + \cos 60^{\circ}) = \frac{1}{4}$; $B = \sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$ $= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}\right)\right]$ $= \frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\pi\right] = -\frac{1}{4}.$
4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH		
HĐ4. Xây dựng công thức biến đổi tổng thành tích	Giúp HS làm quen với công thức biến đổi tổng thành tích qua việc áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng và phép đổi biến số.	GV hướng dẫn HS thực hiện HĐ. HS biến đổi, thành lập công thức. *HD.* Trong các công thức biến đổi tích thành tổng ở Mục 3, đặt $u = a - b$, $v = a + b$, ta có $a = \frac{1}{2}(u + v)$; $b = \frac{1}{2}(v - u)$ và từ các công thức: $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) + \cos(a + b)\right]$ $\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$, ta có $\cos\frac{1}{2}(u + v)\cos\frac{1}{2}(v - u) = \frac{1}{2}(\cos u + \cos v)$ $\sin\frac{1}{2}(u + v)\sin\frac{1}{2}(v - u) = \frac{1}{2}(\cos u - \cos v)$. Biến đổi ta được $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u + v}{2}\cos\frac{u - v}{2}$ $\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u + v}{2}\sin\frac{u - v}{2}$.

		Tương tự ta có được các công thức khác. GV ghi bảng nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 5	HS tính được giá trị của biểu thức lượng giác cho dưới dạng tổng, hiệu các giá trị lượng giác.	GV hướng dẫn HS cách áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tính giá trị biểu thức lượng giác. GV trình bày mẫu và giảng cho HS.
Luyện tập 4	Củng cố cho HS cách áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tính giá trị biểu thức lượng giác.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS lên bảng, nhận xét bài làm. *HD.* $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{11\pi}{9}$ $=\left(\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{11\pi}{9}\right)+\cos\frac{5\pi}{9}$ $=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}$ $=-\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}=0.$
Vận dụng 2	Củng cố, nâng cao kĩ năng biến đổi biểu thức lượng giác qua việc áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích.	HS tự đọc và thực hiện. GV hướng dẫn, gợi ý, gọi HS trả lời giải thích cách làm. *HD* a) Tần số thấp liên quan phím 4 là 770 Hz, tần số cao liên quan phím 4 là 1209 Hz. Hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4 $y=\sin(2\pi.770t)+\sin(2\pi.1209t).$ Áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích, ta được $y=2\sin(1979\pi t)\cos(439\pi t).$
Chữa bài tập cuối bài	Mục đích của hoạt động này là cho HS làm bài tập để củng cố kiến thức đã học. Bài tập 1.10; Bài tập 1.11; Bài tập 1.12; Bài tập 1.13.	HS tự đọc và thực hiện. GV gọi HS trả lời. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại kiến thức (GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học).

Củng cố	Dành cho dự phòng, GV dặn dò HS công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

Áp dụng các công thức lượng giác để tính giá trị lượng giác: Bài tập 1.7, 1.8, 1.9, 1.10.

Sử dụng các công thức lượng giác để chứng minh các đẳng thức lượng giác hoặc rút gọn biểu thức lượng giác: Bài tập 1.11, 1.12, 1.13.

Tuỳ tình hình thực tế, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT để giao cho HS.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.7. $\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

$\cos 15^{o} = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

$\tan 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$;

$\cot 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{3}$.

1.8. a) $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos a \cos\dfrac{\pi}{6} - \sin a \sin\dfrac{\pi}{6}$.

Có $\sin a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$; nên $\cos a < 0$.

Do đó $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Từ đó $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$.

b) Có $\cos a = -\dfrac{1}{3}$ và $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\sin a < 0$.

$\sin a = -\sqrt{1-\cos^2 a} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} : \dfrac{-1}{3} = 2\sqrt{2}.$

Do đó $\tan\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan a - 1}{\tan a + 1} = \dfrac{-1 + 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{9 - 4\sqrt{2}}{7}.$

1.9. a) Vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$. Mặt khác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Suy ra $\cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Do $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9};$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9};$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

b) Vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$ nên $\pi < 2\alpha < \dfrac{3\pi}{2}; \cos 2\alpha < 0.$

Ta có $\sin 2\alpha = \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2 - 1 = -\dfrac{3}{4};$

$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}.$

Do đó $\tan 2\alpha = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

1.10. a) $A = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{10} + \sin\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{15}}{\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{\pi}{5} - \sin\dfrac{2\pi}{15}\sin\dfrac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{15} + \dfrac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\cos\dfrac{\pi}{3}} = 1.$

b) $B = \sin\dfrac{\pi}{32}\cos\dfrac{\pi}{32}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}$

$= \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}.$

1.11. $VT = \sin(a+b)\sin(a-b) = -\dfrac{1}{2}(\cos 2a - \cos 2b)$

$= -\dfrac{1}{2}[(1 - 2\sin^2 a\ ) - (1 - 2\sin^2 b)]$

$= \sin^2 a - \sin^2 b = (1 - \cos^2 a) - (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \cos^2 a.$

1.12. a) Ta có $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$, suy ra $b=\dfrac{a}{\sin A}\sin B$.

Thay vào công thức tính diện tích ta được

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}.a.\frac{a}{\sin A}\sin B\sin C=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

b) Ta có $\widehat{A}=180°-\widehat{B}-\widehat{C}=60°$.

Áp dụng kết quả nhận được từ câu a) ta có

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{144.\sin 75°\sin 45°}{2\sin 60°}.$$

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng ta được

$$\begin{aligned}\sin 75°\sin 45°&=\frac{1}{2}[\cos(75°-45°)-\cos(75°+45°)]\\&=\frac{1}{2}(\cos 30°-\cos 120°)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$S=\frac{36\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}}=12\left(3+\sqrt{3}\right)\ (\text{cm}^2).$$

1.13. Dao động tổng hợp

$$\begin{aligned}x(t)&=x_1(t)+x_2(t)\\&=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)\right]\\&=4\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Vậy $x\left(t\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}t-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Biên độ của dao động tổng hợp là: $A=2\sqrt{2}$.

Pha ban đầu của dao động tổng hợp là: $\varphi=-\dfrac{\pi}{12}$.

Bài 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được các khái niệm về hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết được các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết được định nghĩa các hàm số lượng giác (HSLG) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ thông qua đường tròn lượng giác.
- Mô tả được bảng giá trị của bốn HSLG đó trên một chu kì.
- Vẽ được đồ thị của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.
- Giải thích được: tập xác định; tập giá trị; tính chất chẵn, lẻ; tính tuần hoàn, chu kì; khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ dựa vào đồ thị.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với HSLG.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thể hiện qua việc nhận dạng được tính chẵn – lẻ và tính tuần hoàn của các HSLG; vẽ đồ thị của các HSLG.
- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học thông qua việc giải quyết một số bài toán thực tiễn gắn liền với HSLG.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Nội dung HSLG trong SGK mới có một số khác biệt so với sách giáo khoa cũ. Trong SGK cũ, nội dung HSLG được trình bày sâu hơn và hàn lâm hơn; trong khi SGK mới được trình bày tinh giản hơn, hướng nhiều đến các ứng dụng của HSLG trong thực tiễn.
- Trong chương trình và SGK cũ thì khái niệm hàm số chẵn-lẻ đã được giới thiệu chi tiết ở lớp 10. Tuy nhiên, trong chương trình và SGK mới thì đến lớp 11 mới giới thiệu khái niệm hàm số chẵn-lẻ và khái niệm này được trình bày lồng ghép trong nội dung HSLG. Khái niệm hàm số tuần hoàn cũng được trình bày lồng ghép trong các HSLG.
- Nội dung HSLG ở SGK cũ mang đậm tính hàn lâm thể hiện ở việc SGK cũ nghiên cứu chi tiết tính đơn điệu của các HSLG dựa vào đường tròn lượng giác sau đó lập bảng biến thiên

rồi vẽ đồ thị. Trái lại, SGK mới hướng dẫn HS cách vẽ đồ thị các HSLG trước, sau đó dựa vào đồ thị của chúng suy ra tính đơn điệu, tính chẵn lẻ, tập giá trị, ... của các HSLG (giống như cách làm đối với hàm số bậc hai ở lớp 10).

- Chuẩn bị:
  + GV chuẩn bị thông tin về một số bài toán thực tế liên quan đến HSLG như bài toán biểu diễn sự phụ thuộc của vận tốc luồng khí thở theo thời gian; bài toán dao động điều hoà; bài toán về sự phụ thuộc của huyết áp vào thời gian,...
  + GV và HS chuẩn bị MTCT để thực hành tính toán.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.
  + Tiết 1: Mục 1. Định nghĩa HSLG
    Mục 2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn
    Mục 3. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$.
  + Tiết 2: Mục 4. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cos x$
    Mục 5. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$
    Mục 6. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$
    Hướng dẫn chữa bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học, không yêu cầu giải quyết được ngay tình huống này.	GV chỉ cần nêu tình huống để HS thấy sự phụ thuộc của vận tốc luồng khí thở theo thời gian.
1. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC		
HĐ1. Lập bảng giá trị của các HSLG cơ bản	Giúp HS ôn tập lại cách tính giá trị lượng giác của một góc cho trước, từ đó hướng HS tới quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với giá trị lượng giác của x.	HS tự thực hành tính toán để hoàn thành bảng giá trị. HS có thể sử dụng MTCT, tuy nhiên ưu tiên là thuộc giá trị LG của các góc đặc biệt.

Khung kiến thức	Giúp HS nắm được định nghĩa của bốn HSLG cơ bản. Đó là các hàm số cho bởi công thức $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ và $y = \cot x$	GV yêu cầu HS ghi nhớ tập xác định của bốn HSLG cơ bản.
Ví dụ 1	Giúp HS tìm tập xác định của một HSLG cụ thể.	GV gọi một HS đứng tại chỗ trả lời, sau đó trình bày lời giải cẩn thận lên bảng và yêu cầu HS ghi vào vở.
Luyện tập 1	Cung cấp cho HS một ví dụ tương tự để HS tìm tập xác định của HSLG.	TXĐ là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN		
HĐ2. Nhận biết tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^2$ và $y = x^3$.	Giúp HS nhận biết tính chẵn của hàm số $y = x^2$ và tính đối xứng của đồ thị của nó qua trục *Oy*. Giúp HS nhận biết tính lẻ của hàm số $y = x^3$ và tính đối xứng của đồ thị của nó qua gốc toạ độ *O*.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. Cho HS nhận biết mối quan hệ giữa tính chẵn lẻ của hàm số và tính đối xứng của đồ thị hàm chẵn - lẻ.
Khung kiến thức	Giúp HS nắm được định nghĩa hàm số chẵn và hàm số lẻ. Giúp HS nhận biết tính đối xứng của đồ thị hàm chẵn và hàm lẻ.	GV gọi một HS đứng tại chỗ phát biểu định nghĩa sau đó viết vắn tắt lên bảng và yêu cầu HS ghi vào vở. Cho HS quan sát đồ thị và nhận ra tính đối xứng của đồ thị hàm chẵn - lẻ.
Nhận xét	Giúp HS nắm được cách vẽ đồ thị của hàm chẵn - lẻ: Chỉ cần vẽ đồ thị của nó ở bên phải trục *Oy*, sau đó sử dụng tính đối xứng để có được đồ thị trên toàn tập xác định.	GV gọi HS đứng tại chỗ trả lời và sau đó chính xác hoá câu trả lời.
Ví dụ 2	Cho HS thực hành kiểm tra tính chẵn - lẻ của một hàm số cụ thể.	GV gọi HS đứng tại chỗ trả lời sau đó chính xác hoá câu trả lời.

Luyện tập 2	Cung cấp một ví dụ để HS xét tính chẵn - lẻ.	Hàm số $y = \frac{1}{x}$ là hàm số lẻ.
HĐ3. Nhận biết tính tuần hoàn của các HSLG	Giúp HS nhớ lại mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém nhau π và 2π, từ đó dẫn dắt tới khái niệm hàm số tuần hoàn.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3 để ôn tập lại giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt.
Khung kiến thức	Giúp HS nắm được khái niệm hàm số tuần hoàn và chu kì của hàm số tuần hoàn.	GV viết định nghĩa lên bảng và yêu cầu HS ghi cẩn thận vào vở.
Nhận xét	Giúp HS nhận biết được tính tuần hoàn và chu kì của bốn HSLG cơ bản. Giúp HS nắm được nguyên tắc vẽ đồ thị của hàm số tuần hoàn, đó là chỉ cần vẽ đồ thị của nó trên một chu kì sau đó tịnh tiến ra khắp tập xác định.	GV gọi một HS đứng tại chỗ trả lời về tính tuần hoàn và chu kì của bốn HSLG cơ bản và giải thích câu trả lời sau đó chính xác hoá câu trả lời của HS. GV hướng dẫn HS nguyên tắc vẽ đồ thị của hàm số tuần hoàn.
Ví dụ 3	Giúp HS biết cách kiểm tra tính tuần hoàn của một HSLG cụ thể.	GV gọi một HS lên bảng (gọi HS khá, nếu cần có thể gợi ý hướng dẫn) giải ví dụ 3. GV chữa cẩn thận lời giải của HS.
Chú ý	Giúp HS biết được chu kì tuần hoàn của các hàm số mô tả dao động điều hoà.	GV giải thích sơ lược cho HS.
Luyện tập 3	Cho HS một ví dụ tương tự để HS kiểm tra tính tuần hoàn và tìm chu kì của HSLG.	Hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$.
3. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \sin x$		
HĐ4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$	Hướng dẫn HS cách vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên chu kì $[-\pi; \pi]$ bằng cách lập bảng các giá trị đặc biệt.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ4 dưới sự theo dõi giám sát của GV. GV sẵn sàng giải đáp các câu hỏi của HS.

	Từ tính tuần hoàn của hàm sin, HS sẽ vẽ được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên toàn trục số.	GV kiểm tra bài làm của một vài HS sau đó vẽ đồ thị lên bảng theo từng bước trong HĐ4.
Khung kiến thức	Giúp HS chỉ ra được các tính chất cơ bản của hàm số $y = \sin x$ từ đồ thị của nó. Chẳng hạn, từ đồ thị hàm $y = \sin x$ nghiệm lại được tập giá trị, tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn, chu kì và đặc biệt là các khoảng đồng biến, nghịch biến.	GV gọi một HS đứng tại chỗ trả lời các câu hỏi về các tính chất cơ bản của hàm số $y = \sin x$ sau đó chính xác câu trả lời của HS bằng cách giải thích cặn kẽ trên đồ thị. GV yêu cầu HS ghi chép cẩn thận các tính chất của hàm $y = \sin x$ vào vở.
Ví dụ 4	Giúp HS biết cách sử dụng đồ thị của hàm sin để giải phương trình $\sin x = 0$, giải bất phương trình $\sin x > 0$ trên một đoạn nào đó.	GV gọi một HS đứng tại chỗ quan sát đồ thị hàm sin vừa vẽ và trả lời câu hỏi, sau đó chính xác hoá câu trả lời.
Luyện tập 4	Cho HS một ví dụ tìm tập giá trị của hàm LG sử dụng hàm sin.	Tập giá trị là đoạn $[-2; 2]$.
Vận dụng 1. Khai thác bài toán ở *tình huống mở đầu*	Giúp HS giải quyết một bài toán thực tiễn liên quan đến HSLG. Giúp HS hiểu được ý nghĩa chu kì của hàm số tuần hoàn và giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của HSLG trong thực tiễn.	a) Vận tốc lớn nhất của luồng khí là 0,85 lít/ giây. b) Trong khoảng từ 0 đến 3 giây thì người đó hít vào và từ 3 đến 5 giây thì người đó thở ra.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
4. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \cos x$		
HĐ5. Đồ thị của hàm số $y = \cos x$	Hướng dẫn HS cách vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ5 dưới sự theo dõi giám sát của GV.

	chu kì [−π; π] bằng cách lập bảng các giá trị đặc biệt. Từ tính tuần hoàn của hàm côsin HS sẽ vẽ được đồ thị hàm $y = \cos x$ trên toàn trục số.	GV sẵn sàng giải đáp các câu hỏi của HS. GV kiểm tra bài làm của một vài HS sau đó vẽ đồ thị lên bảng theo từng bước trong HĐ5.
Khung kiến thức	Giúp HS chỉ ra được các tính chất cơ bản của hàm số $y = \cos x$ từ đồ thị của nó. Chẳng hạn, từ đồ thị hàm $y = \cos x$ nghiệm lại được tập giá trị, tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn, chu kì và đặc biệt là các khoảng đồng biến, nghịch biến.	GV gọi một HS đứng tại chỗ trả lời các câu hỏi về các tính chất cơ bản của hàm số $y = \cos x$ sau đó chính xác câu trả lời của HS bằng cách giải thích cặn kẽ trên đồ thị. GV yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.
Ví dụ 5	Giúp HS biết cách sử dụng đồ thị của hàm côsin để giải phương trình $\cos x = 0$, giải bất phương trình $\cos x < 0$ trên một đoạn nào đó.	GV gọi một HS khá đứng tại chỗ trả lời, sau đó giải thích cặn kẽ cho cả lớp.
Luyện tập 5	Cung cấp cho HS một ví dụ vận dụng hàm số côsin để tìm tập giá trị của HSLG.	Tập giá trị của hàm số $y = -3\cos x$ là đoạn [−3; 3].
Vận dụng 2	Cung cấp cho HS một ứng dụng thực tế của hàm số côsin trong Vật lí, đó là phương trình của dao động điều hoà. Ý nghĩa của chu kì tuần hoàn trong mối liên hệ với tần số. Ý nghĩa của tập giá trị với biên độ dao động.	GV giải thích cặn kẽ cho HS.

5. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \tan x$		
HĐ6. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$	Giúp HS sử dụng bảng giá trị của hàm $y = \tan x$ để vẽ đồ thị của nó trên chu kì $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ tính tuần hoàn của hàm $y = \tan x$, vẽ đồ thị của hàm số này trên toàn tập xác định.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ6. GV giúp đỡ HS khi cần. Sau khi HS thực hiện xong các yêu cầu trong HĐ6, GV vẽ đồ thị hàm $y = \tan x$ lên bảng để minh hoạ lại các bước gợi ý trong HĐ6.
Khung kiến thức	Giúp HS chỉ ra được các tính chất cơ bản của hàm $y = \tan x$ từ đồ thị của nó. Chẳng hạn, từ đồ thị hàm $y = \tan x$ nghiệm lại được tập xác định, tập giá trị, tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn - chu kì và đặc biệt là các khoảng đồng biến, nghịch biến.	GV gọi một HS đứng tại chỗ trả lời các câu hỏi về các tính chất cơ bản của hàm $y = \tan x$ sau đó chính xác câu trả lời của HS bằng cách giải thích cặn kẽ trên đồ thị.
Ví dụ 6	Cung cấp cho HS một ví dụ vận dụng đồ thị của hàm số $y = \tan x$.	GV gọi một HS đứng tại chỗ quan sát đồ thị của hàm $y = \tan x$ trên bảng và trả lời câu hỏi, sau đó GV chính xác hoá câu trả lời.
Luyện tập 6	Cung cấp cho HS một ví dụ tương tự Ví dụ 6.	$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
6. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \cot x$		
HĐ7. Đồ thị của hàm số $y = \cot x$	Giúp HS sử dụng bảng giá trị của hàm $y = \cot x$ để vẽ đồ thị của nó trên chu kì $(0; \pi)$. Từ tính tuần hoàn của hàm $y = \cot x$, vẽ đồ thị của hàm số này trên toàn tập xác định.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ7. GV giúp đỡ HS khi cần. Sau khi HS thực hiện xong các yêu cầu trong HĐ7, GV vẽ đồ thị hàm $y = \cot x$ lên bảng để minh hoạ lại các bước gợi ý trong HĐ7.

Khung kiến thức	Giúp HS chỉ ra được các tính chất cơ bản của hàm $y = \cot x$ từ đồ thị của nó. Chẳng hạn, từ đồ thị hàm $y = \cot x$ nghiệm lại được tập xác định, tập giá trị, tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn - chu kì và đặc biệt là các khoảng đồng biến, nghịch biến.	GV gọi một HS đứng tại chỗ trả lời các câu hỏi về các tính chất cơ bản của hàm $y = \cot x$ sau đó chính xác câu trả lời của HS bằng cách giải thích cặn kẽ trên đồ thị.
Ví dụ 7	Cung cấp cho HS một ví dụ vận dụng đồ thị của hàm số $y = \cot x$.	GV gọi một HS đứng tại chỗ quan sát đồ thị của hàm $y = \cot x$ trên bảng và trả lời câu hỏi, sau đó GV chính xác hoá câu trả lời.
Luyện tập 7	Cung cấp cho HS một ví dụ tương tự Ví dụ 7.	$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
Chữa bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Tìm tập xác định của HSLG: Bài tập 1.14.
- Xét tính chẵn - lẻ của HSLG: Bài tập 1.15.
- Tìm tập giá trị của HSLG: Bài tập 1.16.
- Ứng dụng đồ thị của HSLG: Bài tập 1.17.
- Bài toán thực tiễn gắn với HSLG: Bài tập 1.18.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.14. a) Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

1.15. a) Hàm lẻ.

b) Hàm chẵn.

c) Hàm lẻ.

d) Hàm số không chẵn cũng không lẻ.

1.16. a) Tập giá trị của hàm số là đoạn $[-3; 1]$.

b) Tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[-2; \sqrt{2}-2\right]$.

1.17. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy các giá trị x cần tìm là $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.18. a) Hàm số $h(t) = 90\cos\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 20$.

Vậy chu kì của sóng là $T = 20$ giây.

b) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(t)$ lần lượt là 90 và -90 nên chiều cao của sóng là 180 cm.

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản bằng cách vận dụng đồ thị hàm số lượng giác tương ứng.
- Tính được nghiệm gần đúng của phương trình lượng giác cơ bản bằng MTCT.
- Giải được phương trình lượng giác ở dạng vận dụng trực tiếp phương trình lượng giác cơ bản.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với phương trình lượng giác.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thể hiện qua việc nhận dạng được các dạng phương trình lượng giác và biến đổi chúng về phương trình lượng giác cơ bản tương ứng rồi viết công thức nghiệm.
- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học thông qua việc giải quyết một số bài toán thực tiễn, chẳng hạn bài toán bắn đạn pháo ở đầu mục.

- Rèn luyện năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán thể hiện qua việc sử dụng MTCT để tìm nghiệm của các phương trình lượng giác.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Nội dung phương trình lượng giác trong SGK mới có sự khác biệt rất lớn so với sách giáo khoa cũ. Trong SGK cũ, nội dung phương trình lượng giác được trình bày rất rộng và sâu. Ngoài các dạng phương trình lượng giác cơ bản, SGK cũ còn trình bày các dạng phương trình lượng giác bậc cao, phương trình thuần nhất đối với sin và côsin, phương trình đẳng cấp,... Trong SGK mới nội dung phương trình lượng giác được tinh giản chỉ còn hai tiết và chỉ trình bày bốn dạng phương trình lượng giác cơ bản và nâng cao hơn là các dạng phương trình $\sin u = \sin v$, $\cos u = \cos v$, không có các phương trình khó.
- SGK cũ hình thành công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản thông qua việc sử dụng đường tròn lượng giác. SGK mới hình thành công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản thông qua việc sử dụng kết hợp giữa đồ thị của HSLG và đường tròn lượng giác, đặc biệt, sử dụng tính tuần hoàn của HSLG để giải thích tại sao trong công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \sin\alpha$ ta lại phải cộng thêm một bội nguyên của chu kì 2π vào nghiệm cơ sở.
- SGK mới nhấn mạnh đến các ví dụ thực tiễn liên quan đến phương trình lượng giác.
- Chuẩn bị:
    + GV chuẩn bị thông tin về một số bài toán thực tế liên quan đến phương trình lượng giác như bài toán chuyển động ném xiên, bài toán khúc xạ ánh sáng.
    + GV và HS chuẩn bị MTCT để thực hành tính toán.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.
    + Tiết 1: Mục 1. Khái niệm phương trình tương đương.

      Mục 2. Phương trình $\sin x = m$

      Mục 3. Phương trình $\cos x = m$

+ Tiết 2: Mục 4. Phương trình $\tan x = m$

Mục 5. Phương trình $\cot x = m$

Mục 6. Sử dụng MTCT, tìm một góc khi biết giá trị lượng giác của nó.

Hướng dẫn chữa bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học, không yêu cầu giải quyết được ngay tình huống này.	GV chỉ cần nêu tình huống để HS thấy mối liên hệ giữa tầm xa của quả đạn pháo với góc bắn.
1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG		
HĐ1. Nhận biết khái niệm hai phương trình tương đương.	Cho ví dụ hai phương trình đại số đơn giản để HS tự giải để tìm tập nghiệm của chúng để HS nhận ra rằng, mặc dù hai phương trình rất khác nhau nhưng tập nghiệm của chúng có thể bằng nhau.	HS tự thực hiện các yêu cầu và rút ra kết luận. GV chính xác hoá câu trả lời và dẫn dắt HS đến khái niệm hai phương trình tương đương.
Khung kiến thức	Giúp HS phát biểu chính xác thế nào là hai phương trình tương đương. Kí hiệu hai phương trình tương đương.	GV cho HS ghi định nghĩa vào vở.
Chú ý	Nhắc nhở HS rằng, hai phương trình vô nghiệm thì luôn tương đương.	Cho HS thấy rằng, đây chỉ là trường hợp đặc biệt thôi.
Ví dụ 1	Cho HS thực hành, kiểm tra xem hai phương trình có tương đương không.	GV cho HS tự làm ra giấy nháp, sau đó chính xác hoá câu trả lời.

Luyện tập 1	Cho một ví dụ tương tự để HS tự thực hành.	Đây là hai phương trình không tương đương.
Chú ý	Đây thực chất là khung kiến thức. HS cần nắm chắc hai phép biến đổi tương đương này khi giải phương trình.	Cho HS ghi cẩn thận vào vở.
2. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$		
HĐ2. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$.	Hướng dẫn HS cách sử dụng đường tròn lượng giác để nhận biết nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trong nửa khoảng $\left[0;2\pi\right)$. Từ đồ thị của hàm sin và tính tuần hoàn của hàm sin viết công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. GV vẽ đường tròn lượng giác và đồ thị hàm sin lên bảng hoặc trình chiếu lên màn hình. Sau khi cho HS tự trả lời các yêu cầu trong HĐ2, GV chính xác hoá các câu trả lời.
Khái quát hoá phương trình $\sin x = m$	Giúp HS nhận biết được phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\left\|m\right\| \leq 1$. Hướng dẫn HS cách sử dụng đường tròn lượng giác để nhận biết nghiệm của phương trình $\sin x = m$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Từ tính tuần hoàn của hàm sin viết công thức nghiệm của phương trình $\sin x = m$.	GV vẽ đường tròn lượng giác và đồ thị hàm sin lên bảng và yêu cầu HS vẽ vào vở. GV yêu cầu HS chỉ ra trên đường tròn lượng giác các nghiệm của phương trình $\sin x = m$ trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. GV yêu cầu HS chỉ ra các giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm sin; đặc biệt chỉ ra hoành độ của các giao điểm này; từ đó yêu cầu HS viết công thức nghiệm.

Khung kiến thức	Giúp HS viết được công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \sin\alpha$.	GV viết công thức nghiệm lên bảng và yêu cầu HS ghi cẩn thận vào vở, yêu cầu HS phải học thuộc $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$
Chú ý – Công thức nghiệm trong trường hợp đơn vị đo góc là độ. – Các trường hợp đặc biệt.	Giúp HS viết được công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \sin\left(\alpha^{\circ}\right)$ dưới dạng đơn vị đo độ. Giúp HS viết được công thức nghiệm của phương trình $\sin x = m$ trong ba trường hợp đặc biệt khi $m \in \left\{-1; 0; 1\right\}$.	Yêu cầu HS ghi công thức nghiệm dưới dạng đơn vị đo độ vào vở. GV vẽ đường tròn lượng giác lên bảng và yêu cầu HS quan sát rồi cho biết công thức nghiệm của phương trình $\sin x = m$ khi $m \in \left\{-1; 0; 1\right\}$. Giải thích cho HS tại sao khi $m \in \left\{-1; 0; 1\right\}$ thì công thức nghiệm tổng quát ở trên lại được viết ở dạng thu gọn.
Ví dụ 2	Giúp HS biết cách giải phương trình lượng giác cụ thể dạng $\sin x = m$ trong hai trường hợp: khi m là giá trị đặc biệt và khi m không đặc biệt.	GV yêu cầu tất cả HS viết công thức nghiệm vào vở, sau đó kiểm tra vở của một vài HS và chữa bài làm lên bảng để cả lớp cùng quan sát.
Khung kiến thức	Giúp HS viết được công thức nghiệm của phương trình $\sin u = \sin v$.	GV gọi một HS đứng tại chỗ đọc công thức nghiệm, sau đó ghi công thức nghiệm lên bảng và yêu cầu HS ghi cẩn thận vào vở.
Ví dụ 3	Giúp HS biết cách giải một phương trình lượng giác dạng $\sin u = \sin v$ cụ thể.	GV yêu cầu tất cả HS viết công thức nghiệm ra vở ghi, sau đó kiểm tra vở của một vài HS và chữa bài làm lên bảng để cả lớp cùng quan sát.
Ví dụ 4. Giải bài toán ở tình huống mở đầu	Cung cấp cho HS lời giải chi tiết của bài toán thực tiễn vận dụng phương trình $\sin x = m$.	GV trình bày lời giải chi tiết lên bảng và giảng giải cặn kẽ cho HS.

Luyện tập 2	Cho HS rèn luyện cách giải phương trình $\sin x = m$ và $\sin u = -\sin v$ thông qua hai ví dụ tương tự.	HS tự làm tại lớp. GV chính xác hoá lời giải. a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi. \end{array}\right.$ b) $\sin 3x = -\sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{array}\right.$
3. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$		
HĐ3. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$.	Hướng dẫn HS cách sử dụng đường tròn lượng giác để nhận biết nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ trong nửa khoảng $\left[-\pi;\pi\right)$. Từ đồ thị của hàm côsin và tính tuần hoàn của hàm côsin viết công thức nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3. GV vẽ đường tròn lượng giác và đồ thị hàm côsin lên bảng hoặc trình chiếu lên màn hình. Sau khi cho HS tự trả lời các yêu cầu trong HĐ3, GV chính xác hoá các câu trả lời.
Khung kiến thức	Giúp HS viết được công thức nghiệm của phương trình $\cos x = \cos\alpha$.	GV yêu cầu HS ghi công thức nghiệm vào vở.
Chú ý – Công thức nghiệm trong trường hợp đơn vị đo góc là độ. – Các trường hợp đặc biệt.	Giúp HS viết được công thức nghiệm của phương trình $\cos x = \cos\alpha^{\circ}$ dưới dạng đơn vị đo độ. Giúp HS viết được công thức nghiệm của phương trình $\cos x = m$ trong ba trường hợp đặc biệt khi $m \in \{-1; 0; 1\}$.	Yêu cầu HS ghi công thức nghiệm dưới dạng đơn vị đo độ vào vở. GV vẽ đường tròn lượng giác lên bảng và yêu cầu HS quan sát rồi cho biết công thức nghiệm của phương trình $\cos x = m$ khi $m \in \{-1; 0; 1\}$. Giải thích cho HS tại sao khi $m \in \{-1; 0; 1\}$ thì công thức nghiệm tổng quát ở trên lại được viết ở dạng thu gọn.

Ví dụ 5	Cho HS thực hành giải phương trình dạng $\cos x = m$ cụ thể trong hai trường hợp: khi m là giá trị đặc biệt và khi m không đặc biệt.	GV yêu cầu tất cả HS viết công thức nghiệm vào vở, sau đó kiểm tra vở của một vài HS và chữa bài làm lên bảng để cả lớp cùng quan sát.
Khung kiến thức	Giúp HS viết công thức nghiệm của phương trình $\cos u = \cos v$.	GV viết công thức nghiệm lên bảng và yêu cầu HS ghi cẩn thận vào vở, yêu cầu HS phải học thuộc $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$.
Ví dụ 6	Cho HS thực hành giải một phương trình lượng giác dạng $\cos u = \cos v$.	GV yêu cầu tất cả HS giải chi tiết ra vở, sau đó kiểm tra vở của một vài HS và chữa bài làm lên bảng để cả lớp cùng quan sát.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng giải phương trình $\cos x = m$, $\cos u = \cos v$ và phương trình $\cos u = \sin v$.	HS tự làm tại lớp. a) $2\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$. b) $\cos 3x - \sin 5x = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
Vận dụng	Giới thiệu cho HS khái niệm pha của mặt trăng. Cho HS thêm một ví dụ thực tiễn vận dụng phương trình lượng giác.	a) Trăng mới $F = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 1$ $\Leftrightarrow \alpha \in \{0^\circ;\ 360^\circ\}$. b) Trăng lưỡi liềm $F = 0{,}25 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0{,}5$ $\Leftrightarrow \alpha \in \{60^\circ;\ 300^\circ\}$. c) Trăng bán nguyệt $F = 0{,}5 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$ $\Leftrightarrow \alpha \in \{90^\circ;\ 270^\circ\}$. d) Trăng tròn $F = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 180^\circ$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
4. PHƯƠNG TRÌNH tan $x = m$		
HĐ4. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\tan x = 1$	Giúp HS tự khám phá công thức nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ bằng cách quan sát đồ thị hàm tang đã vẽ sẵn.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ4. GV giúp đỡ HS khi cần. GV vẽ hình lên bảng hoặc chiếu hình lên bảng và yêu cầu HS quan sát hình vẽ và trả lời các câu hỏi trong HĐ4.
Khung kiến thức	Giúp HS thấy rằng phương trình $\tan x = m$ luôn có nghiệm với mọi m. Giúp HS ghi nhớ công thức nghiệm của phương trình $\tan x = \tan\alpha$.	GV viết công thức nghiệm lên bảng và đóng khung lại. GV yêu cầu HS ghi công thức vào vở và học thuộc.
Chú ý	Giúp HS viết công thức nghiệm của phương trình $\tan x = \tan\alpha^{\circ}$ ở dạng đơn vị đo độ.	GV yêu cầu HS ghi công thức nghiệm vào vở.
Ví dụ 7	Cho HS thực hành giải phương trình lượng giác dạng $\tan x = m$ cụ thể trong hai trường hợp: khi m là giá trị đặc biệt và khi m không đặc biệt.	HS tự giải, sau đó GV gọi HS đứng tại chỗ đọc công thức nghiệm; cuối cùng GV viết công thức nghiệm lên bảng để cả lớp cùng quan sát.
Luyện tập 4	Cho HS hai ví dụ luyện tập giải phương trình $\tan x = m$ và $\tan u = \tan v$.	a) $\sqrt{3}\tan 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$. b) $\tan 3x + \tan 5x = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{8}$, với $k \neq 4 + 8n, n \in \mathbb{Z}$.
5. PHƯƠNG TRÌNH cot $x = m$		
HĐ5. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\cot x = -1$	Giúp HS tự khám phá công thức nghiệm của phương trình $\cot x = -1$ bằng cách quan sát đồ thị hàm côtang đã vẽ sẵn.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ5. GV giúp đỡ HS khi cần. GV vẽ hình lên bảng hoặc chiếu hình lên bảng và yêu cầu HS quan sát hình vẽ và trả lời các câu hỏi trong HĐ5.

Khung kiến thức	Giúp HS thấy rằng phương trình $\cot x = m$ luôn có nghiệm với mọi m. Giúp HS ghi nhớ công thức nghiệm của phương trình $\cot x = \cot\alpha$.	GV viết công thức nghiệm lên bảng và đóng khung lại. GV yêu cầu HS ghi công thức vào vở và học thuộc.
Chú ý	Giúp HS viết công thức nghiệm của phương trình $\cot x = \cot\alpha^{\text{o}}$ ở dạng đơn vị đo độ.	GV yêu cầu HS ghi công thức nghiệm vào vở.
Ví dụ 8	Cho HS thực hành giải phương trình lượng giác dạng $\cot x = m$ cụ thể trong hai trường hợp: khi m là giá trị đặc biệt và khi m không đặc biệt.	HS tự giải ra vở ghi sau đó GV gọi HS đứng tại chỗ đọc công thức nghiệm; cuối cùng GV viết công thức nghiệm lên bảng để cả lớp cùng quan sát.
Luyện tập 5	Cho HS hai ví dụ luyện tập giải phương trình $\cot x = m$.	a) $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. b) $\sqrt{3}\cot x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.
6. SỬ DỤNG MTCT TÌM MỘT GÓC KHI BIẾT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CHÚNG		
Khung kiến thức	Hướng dẫn HS cách sử dụng MTCT để giải phương trình lượng giác.	Cần lưu ý là các loại MTCT khác nhau thì cách ấn phím có thể khác nhau. GV hướng dẫn tuỳ theo thực tế các loại MTCT mà HS có.
Ví dụ 9	Cho HS một ví dụ cụ thể sử dụng MTCT giải phương trình LG.	GV cho HS thực hành sử dụng MTCT giải phương trình LG sau đó yêu cầu HS cung cấp kết quả trên màn hình MT.
Luyện tập 6	Cung cấp cho HS một số ví dụ tương tự sử dụng MTCT.	HS tự thực hành dưới sự hướng dẫn của GV.
Chữa bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Giải phương trình lượng giác cơ bản: Bài tập 1.19.
- Giải phương trình lượng giác dạng $\sin u = \sin v$; $\cos u = \cos v$; $\sin u = \cos v$: Bài tập 1.20.
- Bài toán thực tiễn dẫn đến giải phương trình lượng giác: Bài tập 1.21, Bài tập 1.22.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.19. a) Nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

b) Nghiệm $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

c) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \tan 30^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k360^\circ$.

d) $\cot(2x - 1) = \cot\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2}$.

1.20. a) $\sin 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \\ 4x = -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

b) $\cos 3x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi + 7x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \pi + 7x + k2\pi \\ 3x = -(\pi + 7x) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}. \end{array}\right.$$

1.21. Phương trình quỹ đạo của quả đạn pháo là

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \Leftrightarrow y = \frac{-9{,}8}{2 \cdot 500^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

a) Tầm xa của quả đạn là $x = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \dfrac{500^2 \sin 2\alpha}{9{,}8}$.

b) Để quả đạn đánh trúng mục tiêu ở vị trí cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 m thì tầm xa của quả đạn phải thoả mãn $x = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 22000$, tức là

$$\frac{500^2 \sin 2\alpha}{9{,}8} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{22000 \cdot 9{,}8}{500^2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha \approx 29^\circ 47' 36'' \\ \alpha \approx 60^\circ 12' 23''. \end{array}\right.$$

1.22. Vật đi qua vị trí cân bằng khi và chỉ khi

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \; (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì xét trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây nên ta có

$$0 \le t \le 6 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \le 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le k \le \frac{30}{\pi} - 2 \approx 7{,}55.$$

Vì k là số nguyên nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 8 lần.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương (có thể chuẩn bị slides dạng sơ đồ hoá).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

1.23	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30
A	B	A	C	C	C	A	B

1.31. Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0$, suy ra $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra:

a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$.

b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3 + \sqrt{6}}{6}$.

c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + 3}{6}$.

d) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$.

1.32. Ta có:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$.

b) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha$.

1.33. a) Vì $-1 \le \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-3 \le 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra tập giá trị của hàm số $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ là đoạn $[-3\,;1]$.

b) Ta có $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vì $-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$ nên $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$.

Suy ra tập giá trị của hàm số $y = \sin x + \cos x$ là đoạn $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

1.34. a) Ta có $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$

b) Ta có $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow -\cos 2x + \cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 2x + k2\pi \\ 3x = -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{5}. \end{array}\right.$$

c) Ta có $\tan\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{5}=x-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{11\pi}{30}+k\pi$.

1.35. a) Chu kì của hàm số $p(t)=115+25\sin(160\pi t)$ là $T=\frac{2\pi}{160\pi}=\frac{1}{80}$ vì

$$\begin{aligned}p\left(t+\frac{1}{80}\right)&=115+25\sin160\pi\left(t+\frac{1}{80}\right)\\&=115+25\sin(160\pi t+2\pi)=115+25\sin(160\pi t)=p(t),\forall t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

và $T=\frac{1}{80}$ là số thực dương nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức $p\left(t+\frac{1}{80}\right)=p(t),\forall t\in\mathbb{R}$.

b) Theo câu a, cứ sau $T=\frac{1}{80}$ phút thì huyết áp lại lặp lại như cũ nên số nhịp tim mỗi phút là 80 lần.

c) Ta có $90=115-25\le 115+25\sin(160\pi t)\le 115+25=140,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra huyết áp tối đa là 140 và huyết áp tối thiểu là 90. Huyết áp của người này cao hơn so với huyết áp bình thường.

1.36. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng ta có

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{n_2}{n_1}\Leftrightarrow\frac{\sin50^\circ}{\sin r}=\frac{1,33}{1}\Leftrightarrow\sin r=\frac{\sin50^\circ}{1,33}\approx0,57597.$$

Vì góc khúc xạ $r\in(0^\circ;90^\circ)$ nên $r\approx35^\circ10'4''$.

Chương II. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

Mục đích của chương này là giới thiệu những khái niệm cơ bản về dãy số và hai loại dãy số đặc biệt, có nhiều ứng dụng trong thực tế là cấp số cộng và cấp số nhân. Đây thực chất là những hàm số xác định trên tập các số nguyên dương, hoặc một tập con hữu hạn của tập các số nguyên dương (nếu dãy số đã cho là dãy số hữu hạn).

Những khái niệm về dãy số trong chương này còn giúp chúng ta trong Chương V trình bày khái niệm giới hạn, một trong những khái niệm nền tảng của Giải tích. Từ khái niệm giới hạn này, người ta xây dựng hai phép tính cơ bản của Giải tích là phép lấy đạo hàm và phép lấy tích phân.

2 Cấu tạo chương

- Tổng thời lượng: 7 tiết.
- Nội dung:

  Bài 5. Dãy số (2 tiết)

  Bài 6. Cấp số cộng (2 tiết)

  Bài 7. Cấp số nhân (2 tiết)

  Bài tập cuối chương II (1 tiết).

3 Một số điểm cần lưu ý

- Theo tinh thần chung của Chương trình GDPT môn Toán năm 2018 là giảm tính hàn lâm, và do HS đại trà không được học về chứng minh bất đẳng thức, phương pháp quy nạp toán học và cách giải hệ ba phương trình ba ẩn, nên những nội dung thuần tuý toán về dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân được giảm nhẹ nhiều. Cụ thể, những bài toán về xét tính tăng, giảm, bị chặn của dãy số được giảm nhẹ rất nhiều; các dãy số thường cho sẵn công thức xác định (công thức số hạng tổng quát hoặc hệ thức truy hồi), hoặc chỉ yêu cầu HS dự đoán công thức dựa trên quan sát một số số hạng đầu (kể cả công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng và cấp số nhân), chứ không yêu cầu HS chứng minh chặt chẽ bằng phương pháp quy nạp. Ngoài ra, do Chương trình không yêu cầu nên tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân cũng được đưa thành bài tập, chứ không trình bày trong lí thuyết như các SGK Toán THPT cũ.

Bên cạnh việc giảm tính hàn lâm và giảm mức độ của các bài tập thuần tuý toán, một điểm mới nổi bật trong SGK Toán 11 mới này là những ứng dụng thực tế của dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân được đặc biệt chú trọng. Điều này thể hiện rất rõ trong những bài toán ở Tình huống mở đầu, Vận dụng và những bài tập thực tiễn trong SGK. Đây có thể coi là khác biệt cơ bản so với các SGK Toán 11 trước đây.

- Theo yêu cầu của Chương trình mới, HS nên được tham gia tích cực vào các hoạt động trong bài học, từ các hoạt động hình thành kiến thức mới đến các hoạt động luyện tập, vận dụng. SGK đã cố gắng thiết kế các hoạt động tương ứng. GV chỉ nên gợi ý, hướng dẫn cho HS (nếu cần) trong các hoạt động này, hạn chế việc làm thay (hoàn toàn) cho HS.
- Về Hình thức dạy học:
  + Nếu có điều kiện thì GV nên chuẩn bị sẵn slides phần đề bài của các hoạt động. Đến hoạt động nào thì trình chiếu yêu cầu của hoạt động đó lên cho HS theo dõi và thực hiện. Việc này vừa tiết kiệm thời gian viết bảng, vừa sinh động hơn và làm HS tập trung hơn vào yêu cầu của GV.
  + Với mỗi hoạt động, có thể cho HS làm việc cá nhân hoặc hoạt động nhóm (tùy tính chất của hoạt động). Sau đó yêu cầu HS trình bày câu trả lời (bằng miệng, giơ bảng trả lời, viết bảng). GV nhận xét và tổng kết, đặc biệt lưu ý phương pháp giải và các sai lầm thường mắc.
  + Với các ví dụ đơn giản trong bài học, GV có thể để HS tự làm và chỉ gợi ý khi cần. Tuy nhiên, với các ví dụ phức tạp hơn, thì có thể xử lí tuỳ theo trình độ chung của HS trong lớp. Nếu ở lớp HS khá, GV chỉ cần phân tích đề bài, gợi ý để HS có thể tự làm sau đó sẽ nhận xét và tổng kết phương pháp giải. Còn ở lớp với trình độ chung của HS không tốt, GV có thể chữa mẫu và phân tích kĩ cách giải (theo lược đồ 4 bước của Polya). Sau đó yêu cầu HS làm các bài tập tương tự trong phần Luyện tập, Vận dụng, GV quan sát và trợ giúp HS khi cần.
- Trong mỗi bài học, các gợi ý dạy học và dự kiến thời gian tương ứng cho từng cấu phần của bài học chỉ là một phương án đề xuất. GV có thể dựa trên kinh nghiệm giảng dạy của mình và trình độ chung của HS trong lớp để có thể có phương án hợp lí hơn, miễn là đảm bảo mục tiêu của bài học và HS được tham gia tích cực vào các hoạt động.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 5. DÃY SỐ (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được dãy số hữu hạn, dãy số vô hạn.
- Thể hiện được các cách cho một dãy số: bằng liệt kê các số hạng (đối với dãy số hữu hạn và có ít số hạng); bằng công thức của số hạng tổng quát; bằng hệ thức truy hồi; bằng cách mô tả.
- Nhận biết được tính chất tăng, giảm, bị chặn của dãy số trong những trường hợp đơn giản.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc thiết lập các dãy số liên quan đến thực tiễn ở trong bài học.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày Dãy số ở đây và trong SGK Toán 11 cũ. Tuy nhiên, theo tinh thần của Chương trình mới, chúng tôi nhấn mạnh đến sự xuất hiện của dãy số trong các bài toán thực tế và giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán liên quan đến dãy số.
- Do tinh thần chung là giảm nhẹ các yếu tố hàn lâm của Chương trình mới, HS đại trà không còn được học phương pháp quy nạp toán học ở trong SGK Toán (mà chỉ trình bày ở Chuyên đề học tập Toán 10, là chuyên đề tự chọn của HS), nên công thức tổng quát của dãy số hoặc hệ thức truy hồi của các dãy số liên quan trong các ví dụ, bài tập trong bài học được hình thành từ việc yêu cầu HS viết một vài số hạng đầu, sau đó phát hiện ra quy luật và khái quát lên thành công thức tổng quát và công nhận; chứ không yêu cầu HS phải chứng minh chặt chẽ bằng phương pháp quy nạp toán học.
- Do theo Chương trình mới, HS không được học một cách hệ thống về chứng minh bất đẳng thức và HS đại trà không được học về phương pháp quy nạp toán học, nên mức độ của các bài tập về xét tính tăng, giảm, tính bị chặn của các dãy số được giảm nhẹ rất nhiều so với trước đây. GV cần đặc biệt lưu ý điều này khi lựa chọn các ví dụ, bài tập tương ứng với kĩ năng này cho phù hợp với yêu cầu cần đạt của Chương trình.

– Chuẩn bị:

  + GV chuẩn bị thông tin số liệu thực tế (tại thời điểm giảng dạy) về một số vấn đề trong cuộc sống liên quan đến dãy số (số dân của một địa phương qua từng năm khi tốc độ tăng dân số không đổi, số tiền nhận được sau từng năm khi gửi tiết kiệm với lãi suất không đổi, ...)

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bố thời gian: 2 tiết.

– Tiết 1: Mục 1. Định nghĩa dãy số.

  Mục 2. Các cách cho một dãy số.

– Tiết 2: Mục 3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn.

  Hướng dẫn giải bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để HS thấy nhu cầu thực tế cần xét những bài toán như vậy.
1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ		
HĐ1. Nhận biết dãy số vô hạn	Cho HS làm quen với dãy gồm tất cả các số chính phương, sắp xếp theo thứ tự tăng dần, để dẫn đến khái niệm dãy số tổng quát.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 1	Minh hoạ cách xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của một vài dãy số đơn giản.	GV giải thích cho HS.
HĐ2. Nhận biết dãy số hữu hạn	Giới thiệu cho HS dãy hữu hạn gồm các số chính	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2.

	phương nhỏ hơn 50, để dẫn đến khái niệm dãy số hữu hạn tổng quát.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng xác định một dãy số hữu hạn, số hạng đầu và số hạng cuối của nó.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng xác định số hạng tổng quát của một dãy số, số hạng đầu và số hạng cuối của một dãy số hữu hạn.	HS tự làm tại lớp.
2. CÁC CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ		
HĐ3. Nhận biết các cách cho một dãy số	Giúp HS biết các cách cho một dãy số qua ví dụ cụ thể.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3. Lưu ý cho HS ở đây là cùng một dãy số nhưng có thể cho bằng những cách khác nhau.
Ví dụ 3	Giúp HS biết cách xác định một số hạng bất kì của một dãy số đã cho khi biết công thức của số hạng tổng quát	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 4	Cho HS làm quen với một dãy số cho bằng phương pháp mô tả, mà không thể cho bằng các cách khác.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng xác định những số hạng đầu của một dãy số cho bằng hệ thức truy hồi.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 6	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng được học vào giải quyết một bài toán thực tế đặt ra ở đầu bài học.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng xác định những số hạng đầu của một dãy số khi biết số hạng tổng quát hoặc hệ thức truy hồi.	HS tự làm tại lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN		
HĐ4. Nhận biết dãy số tăng, dãy số giảm	Giúp HS biết cách kiểm tra một dãy số có công thức của số hạng tổng quát cho trước có là dãy số tăng hay giảm không.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ4. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 7	Rèn luyện cho HS kĩ năng xét tính tăng, giảm của một dãy số khi biết số hạng tổng quát trong trường hợp đơn giản	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố cho HS kĩ năng xét tính tăng, giảm của một dãy số khi biết số hạng tổng quát trong trường hợp đơn giản	HS tự làm tại lớp.
HĐ5. Nhận biết dãy số bị chặn	Cho HS làm quen với một dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới, khi biết công thức của số hạng tổng quát của dãy số.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ5. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 8	Rèn luyện cho HS kĩ năng xét tính bị chặn của một	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

	dãy số khi biết số hạng tổng quát trong trường hợp đơn giản	
Luyện tập 4	Củng cố cho HS kĩ năng xét tính bị chặn của một dãy số khi biết số hạng tổng quát trong trường hợp đơn giản	HS tự làm tại lớp.
Vận dụng	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng được học vào giải quyết một bài toán thực tế.	HS tự làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. *HD.* a) Sử dụng hệ thức truy hồi, tính lần lượt s_2, s_3, s_4, s_5. Đáp số: $s_5 = 300$ (triệu đồng). b) Dễ thấy $s_n - s_{n-1} = 25, \forall n \geq 2$. Do đó (s_n) là dãy số tăng. Ý nghĩa thực tế của kết quả này là lương của anh Thanh tăng dần theo từng năm.
Hướng dẫn giải bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Xác định số hạng cụ thể hoặc số hạng tổng quát của một dãy số: Bài tập 2.1, 2.2, 2.5.
- Xét tính tăng, giảm, bị chặn của một dãy số: Bài tập 2.3, 2.4.
- Bài toán thực tế liên quan đến dãy số: Bài tập 2.6, 2.7.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

2.1. a) $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 10, u_5 = 13, u_{100} = 298$.

b) $u_1 = 6; u_2 = 12; u_3 = 24; u_4 = 48; u_5 = 96; u_{100} = 3 \cdot 2^{100}$.

c) $u_1 = 2; u_2 = 2{,}25; u_3 = 2{,}3703; u_4 = 2{,}4414; u_5 = 2{,}4883; u_{100} = 2{,}7048$.

2.2. a) $u_1 = 1; u_2 = 2 \cdot 1 = 2; u_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6;$

$u_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24; u_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

b) Công thức tổng quát của dãy số là $u_n = n!$.

(Ta có thể chứng minh chặt chẽ công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học).

2.3. a) Ta có $A = u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2 > 0 \forall n \geq 1,$ tức là

$u_{n+1} > u_n \ \forall n \geq 1$ nên dãy số là dãy tăng.

b) Ta có $A = u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 2 - (-3n+2) = -3 < 0 \forall n \geq 1,$ tức là

$u_{n+1} < u_n \ \forall n \geq 1$ nên dãy số là dãy giảm.

c) Ta có $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{-1}{4}; u_3 = \frac{1}{8}$. Như vậy $u_1 > u_2$ và $u_2 < u_3$ nên dãy số đã cho là dãy không tăng không giảm.

2.4. a) Dãy số bị chặn dưới bởi 0; dãy số không bị chặn trên.

b) Ta có $\frac{2}{3} \leq \frac{n+1}{n+2} < 1 \ \forall n \geq 1$ nên dãy số là bị chặn.

c) Ta có $-1 \leq \sin n \leq 1 \ \forall n \geq 1$ nên dãy số là bị chặn.

d) Dãy số không bị chặn trên và không bị chặn dưới.

2.5. a) $u_n = 3n$ với $n \geq 1$.

b) $u_n = 4(n-1) + 1 = 4n - 3$ với $n \geq 1$.

2.6. a) Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất là

$$A_1 = 100 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^1 \approx 100,5 \text{ triệu đồng.}$$

Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ hai là

$$A_2 = 100 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^2 \approx 101 \text{ triệu đồng.}$$

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm là

$$A_{12} = 100 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} \approx 106,17 \text{ triệu đồng.}$$

2.7. a) Tính lần lượt, ta có

$A_1 \approx 98,8; A_2 \approx 97,59; A_3 \approx 96,37; A_4 \approx 95,14; A_5 \approx 93,9; A_6 \approx 92,96.$

Số nợ của chị Hương sau 6 tháng là 92,96 triệu đồng.

b) Sau tháng thứ *n*, chị Hương còn nợ $A_{n-1} + 0{,}8\% \cdot A_{n-1} = 1{,}008A_{n-1}$. Nhưng do chị đã trả 2 triệu nên số tiền nợ là $1{,}008A_{n-1} - 2$. Vậy $A_n = 1{,}008A_{n-1} - 2$ (có thể chứng minh chặt chẽ hệ thức truy hồi này bằng phương pháp quy nạp toán học).

Bài 6. CẤP SỐ CỘNG (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được một dãy số là cấp số cộng.
- Giải thích được công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng.
- Tính được tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn liên quan đến cấp số cộng.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến cấp số cộng; rèn luyện năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán thông qua việc sử dụng MTCT để tính tổng *n* số hạng liên tiếp của một dãy số.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày cấp số cộng ở đây và SGK Toán 11 cũ. Tuy nhiên, theo tinh thần của Chương trình mới, chúng tôi nhấn mạnh đến nguồn gốc và ứng dụng của cấp số cộng trong các bài toán thực tế và giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán liên quan đến cấp số cộng. Ngoài ra, chúng tôi hướng dẫn HS tự xây dựng công thức tính tổng *n* số hạng đầu của một cấp số cộng, chứ không yêu cầu HS công nhận như SGK Toán 11 cũ.
- Do HS đại trà không được học phương pháp quy nạp toán học, nên công thức tổng quát của cấp số cộng ở đây được hình thành từ việc yêu cầu HS viết một vài số hạng đầu, sau đó khái quát lên thành công thức tổng quát và công nhận; chứ không yêu cầu HS phải chứng minh chặt chẽ bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Do Chương trình không yêu cầu và do thời gian hạn chế (và cũng như SGK Toán của các nước phát triển), chúng tôi không trình bày tính chất của cấp số cộng như là một mục riêng trong lí thuyết như trong SGK cũ; mà thiết kế thành một bài tập ở phần ôn tập chương, cùng với tính chất tương ứng của cấp số nhân. Thật ra, tính chất này cũng ít dùng (cả trong thực tế và trong giải toán), mà kĩ năng quan trọng và có nhiều ứng dụng hơn là chèn giữa hai số phân biệt *k* số khác sao cho theo thứ tự chúng lập thành một cấp số cộng (kĩ năng này sẽ được đề cập đến trong SBT).
- Chúng tôi giới thiệu kí hiệu tổng Sigma và cách dùng MTCT để tính tổng *n* số hạng liên tiếp của một dãy số khi biết công thức của số hạng tổng quát, nói riêng là tính tổng *n* số hạng đầu của một cấp số cộng. Đây là kĩ năng quan trọng và hữu ích, GV cần lưu ý rèn luyện cho HS.
- Chuẩn bị:
  + GV chuẩn bị thông tin về một số mô hình thực tế liên quan đến cấp số cộng (số ghế ở nhà hát, số ghế ngồi ở khu vực góc khán đài của các sân vận động bóng đá, ...).
  + GV và HS chuẩn bị MTCT để thực hành tính toán.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.
  + Tiết 1: Mục 1. Định nghĩa
  Mục 2. Số hạng tổng quát
  + Tiết 2: Mục 3. Tổng *n* số hạng đầu của một cấp số cộng
  Hướng dẫn giải bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để HS thấy quy luật về số ghế ở mỗi dãy và nhu cầu thực tế về tính tổng của những dãy số như vậy.

1. ĐỊNH NGHĨA		
HĐ1. Nhận biết khái niệm cấp số cộng	Giới thiệu cho HS một dãy số quen thuộc mà số hạng sau bằng số hạng trước cộng với một số không đổi (dãy các số tự nhiên lẻ), để dẫn đến khái niệm cấp số cộng.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Câu hỏi sau khung kiến thức là nhằm mục đích giới thiệu một cấp số cộng đặc biệt, có công sai bằng 0; đó là dãy số hằng.
Ví dụ 1	Giúp HS biết sử dụng số hạng đầu và công sai để xác định dần các số hạng của một cấp số cộng, dựa vào định nghĩa.	GV hướng dẫn HS dùng hệ thức truy hồi để viết dần các số hạng của cấp số cộng.
Ví dụ 2	Giúp HS biết cách kiểm tra xem một dãy số cho trước có phải là cấp số cộng không, khi biết số hạng tổng quát của dãy.	GV lưu ý cho HS phương pháp giải ở đây là xét hiệu của hai số hạng liên tiếp bất kì. Nếu hiệu này là một hằng số không đổi thì dãy số đó là cấp số cộng (và hằng số đó chính là công sai); nếu trái lại thì dãy số không phải là cấp số cộng. Lưu ý là ta có kết quả tổng quát: Mọi dãy số (u_n) với $u_n = an + b$ (a, b là hằng số), đều là cấp số cộng với $u_1 = a + b$ và công sai $d = a$.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng nhận biết một dãy số cho trước có phải là cấp số cộng hay không.	HS tự làm tại lớp.
2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT		
HĐ2. Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng	Giúp HS dự đoán công thức số hạng tổng quát của một cấp số cộng.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2, để dự đoán công thức số hạng tổng quát. Lưu ý là không yêu cầu HS phải chứng minh chặt chẽ bằng quy nạp.

Ví dụ 3	Giúp HS biết cách xác định một số hạng bất kì của một cấp số cộng đã cho.	Điểm mấu chốt ở đây là xác định được số hạng đầu và công sai. Từ đó ta có thể xác định được số hạng bất kì của cấp số cộng.
Ví dụ 4	Biết cách xác định số hạng đầu và công sai của một cấp số cộng khi có dữ kiện phù hợp (chẳng hạn biết 2 số hạng của cấp số cộng đó).	Sử dụng công thức số hạng tổng quát để lập hệ phương trình với ẩn là số hạng đầu và công sai. Giải hệ này ta sẽ xác định được các yếu tố cơ bản của cấp số cộng.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng nhận biết một dãy số là cấp số cộng và xác định các yếu tố cơ bản của nó.	HS tự làm tại lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. TỔNG *n* SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG		
HĐ3. Xây dựng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng	Giúp HS tự khám phá công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ3. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý là công thức tính tổng có hai dạng.
Ví dụ 5	Rèn kĩ năng tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng qua bài toán thực tiễn ở tình huống mở đầu.	HS tự làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 6	Xác định số các số hạng đầu của một cấp số cộng để tổng của chúng là số cho trước.	HS tự làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Lưu ý là ta đưa về phương trình bậc hai đối với n, ở đây n là số số hạng đầu của cấp số cộng.

Vận dụng	Củng cố kĩ năng tính tổng của n số hạng đầu của một cấp số cộng.	HS tự làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. *HD.* Lưu ý lương hàng năm của anh Nam lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 100 và công sai bằng 20. Ta cần tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng này. ĐS: Tổng lương trong 10 năm của anh Nam là $S_{10} = 1900$ (triệu đồng), tức là 1,9 tỉ đồng.
Góc công nghệ	Hướng dẫn HS cách sử dụng MTCT để tính tổng n số hạng liên tiếp của một dãy số khi biết công thức của số hạng tổng quát.	Cần lưu ý là các loại MTCT khác nhau thì cách ấn phím có thể khác nhau. GV hướng dẫn tuỳ theo thực tế các loại MTCT mà HS có.
Hướng dẫn giải bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Nhận biết cấp số cộng, tìm các yếu tố của một cấp số cộng: Bài tập 2.8, 2.9, 2.10.
- Tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng: Bài tập 2.11.
- Bài toán thực tế liên quan đến cấp số cộng: Bài tập 2.12, 2.13, 2.14.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

2.8. a) Công sai d = 5. Số hạng thứ 5 là $u_5 = 24$.

Số hạng tổng quát $u_n = 4 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 1$.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = 5 \cdot 100 - 1 = 499$.

b) Công sai d = –2. Số hạng thứ 5 là $u_5 = -7$.

Số hạng tổng quát là $u_n = 1 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 3$.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = -2 \cdot 100 + 3 = -197$.

2.9. a), b), d) là cấp số cộng. Chỉ cần xét hiệu $u_n - u_{n-1}$ của hai số hạng liên tiếp.

2.10. Giải tương tự Ví dụ 4, ta được $u_1 = 10, d = 2$. Vậy $u_{50} = 108$.

2.11. Giải tương tự Ví dụ 6. Đáp số: $n = 50$.

2.12. Giá trị của chiếc xe ô tô trong từng năm lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 680$ và công sai $d = -55$. Giá trị còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng chính là $u_6 = u_1 + 5d = 405$ (triệu đồng).

2.13. Gọi n là số hàng ghế của hội trường đó. Số ghế ngồi ở mỗi hàng ghế lập thành một cấp số cộng gồm n số hạng, với số hạng đầu là $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$.

Từ giả thiết $S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[30 + 3(n-1)\right] \geq 870$, ta tìm được $n \geq 20$.

Vậy kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu 20 hàng ghế.

2.14. Đổi 1,2 triệu người = 1 200 nghìn người.

Số dân (đơn vị nghìn người) của thành phố đó trong từng năm (từ năm 2020 đến 2030) lập thành một cấp số cộng, với số hạng đầu $u_1 = 1200$ và công sai $d = 30$.

Số dân của thành phố đó vào năm 2030 ứng với số hạng

$$u_{11} = u_1 + 10d = 1200 + 10 \cdot 30 = 1500.$$

Vậy dân số của thành phố đó vào năm 2030 là khoảng 1,5 triệu người.

Bài 7. CẤP SỐ NHÂN (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được một dãy số là cấp số nhân.
- Giải thích được công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân.
- Tính được tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn liên quan đến cấp số nhân.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến cấp số nhân.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày cấp số nhân ở đây và SGK Toán 11 cũ. Tuy nhiên, theo tinh thần của Chương trình mới, chúng tôi nhấn mạnh đến nguồn gốc và ứng dụng của cấp số nhân trong các bài toán thực tế và giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán liên quan đến cấp số nhân. Ngoài ra, chúng tôi hướng dẫn HS tự xây dựng công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân, chứ không yêu cầu HS công nhận như SGK Toán 11 cũ.
- Do HS đại trà không được học phương pháp quy nạp toán học, nên công thức tổng quát của cấp số nhân ở đây được hình thành từ việc yêu cầu HS viết một vài số hạng đầu, sau đó khái quát lên thành công thức tổng quát và công nhận; chứ không yêu cầu HS phải chứng minh chặt chẽ bằng phương pháp quy nạp toán học.
- Do Chương trình không yêu cầu và do thời gian hạn chế (và cũng như SGK Toán của các nước phát triển), chúng tôi không trình bày tính chất của cấp số nhân như là một mục riêng trong lí thuyết như trong SGK cũ; mà thiết kế thành một bài tập ở phần ôn tập chương, cùng với tính chất tương ứng của cấp số cộng.
- Chuẩn bị:
  + GV chuẩn bị thông tin về một số mô hình thực tế liên quan đến cấp số nhân (những mô hình với tốc độ tăng trưởng không đổi, ...).

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.
  + Tiết 1: Mục 1. Định nghĩa
  Mục 2. Số hạng tổng quát
  + Tiết 2: Mục 3. Tổng *n* số hạng đầu của một cấp số nhân
  Hướng dẫn giải bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để HS thấy tốc độ tăng trưởng hằng năm của lương là không đổi và nhu cầu thực tế về tính tổng của những dãy số như vậy.

1. ĐỊNH NGHĨA		
HĐ1. Nhận biết cấp số nhân	Giới thiệu cho HS một dãy số quen thuộc mà số hạng sau bằng số hạng trước nhân với 2, với số hạng đầu bằng 6, để dẫn đến khái niệm cấp số nhân.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Câu hỏi sau khung kiến thức là nhằm mục đích giới thiệu một cấp số nhân đặc biệt, có công bội bằng 1; đó là dãy số hằng.
Ví dụ 1	Giúp HS biết sử dụng số hạng đầu và công bội để xác định dần các số hạng của một cấp số nhân, dựa vào định nghĩa.	GV hướng dẫn HS dùng hệ thức truy hồi để viết dần các số hạng của cấp số nhân.
Ví dụ 2	Giúp HS biết cách kiểm tra xem một dãy số cho trước có phải là cấp số nhân không, khi biết số hạng tổng quát của dãy.	GV lưu ý cho HS phương pháp giải ở đây là xét thương $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ của hai số hạng liên tiếp bất kì. Nếu thương này là một hằng số không đổi thì dãy số đó là cấp số nhân (và hằng số đó chính là công bội); nếu trái lại thì dãy số không phải là cấp số nhân.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng nhận biết một dãy số cho trước có là cấp số nhân hay không, và xác định các yếu tố cơ bản của nó khi nó là cấp số nhân	HS tự làm tại lớp.
2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT		
HĐ2. Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân	Giúp HS dự đoán công thức số hạng tổng quát của một cấp số nhân.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2, để dự đoán công thức số hạng tổng quát. Lưu ý là không yêu cầu HS phải chứng minh chặt chẽ bằng quy nạp.

Ví dụ 3	Giúp HS biết cách xác định một số hạng bất kì của một cấp số nhân đã cho.	Điểm mấu chốt ở đây là xác định được số hạng đầu và công bội. Từ đó ta có thể xác định được số hạng bất kì của cấp số nhân.
Ví dụ 4	Biết cách xác định số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân khi có dữ kiện phù hợp (chẳng hạn biết hai số hạng của cấp số nhân đó).	Sử dụng công thức số hạng tổng quát để lập hệ phương trình với ẩn là số hạng đầu và công bội. Giải hệ này ta sẽ xác định được các yếu tố cơ bản của cấp số nhân.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng nhận biết một dãy số là cấp số nhân và xác định các yếu tố cơ bản của nó thông qua một bài toán thực tiễn.	HS tự làm tại lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. TỔNG *n* SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN		
HĐ3. Xây dựng công thức tính tổng *n* số hạng đầu của cấp số nhân	Giúp HS tự khám phá công thức tính tổng *n* số hạng đầu của một cấp số nhân.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ3. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 5	Rèn kĩ năng tính tổng *n* số hạng đầu của một cấp số nhân thông qua bài toán thực tiễn ở tình huống mở đầu.	HS tự làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 6	Xác định số các số hạng đầu của một cấp số nhân để tổng của chúng là số cho trước.	HS tự làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Lưu ý là ta đưa về phương trình bậc hai đối với *n*, ở đây *n* là số các số hạng đầu của cấp số nhân.

Vận dụng	Củng cố kĩ năng tính tổng của n số hạng đầu của một cấp số cộng và một cấp số nhân.	HS tự làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Ta tính tiền lương của công nhân lần lượt theo hai phương án. Phương án 1: Lương quý của công nhân là cấp số cộng với $u_1 = 3 \cdot 5 = 15$ và công sai $d = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$. Như vậy sau ba năm tức là 12 quý thì tổng số lương công nhân nhận được là $S_{12} = \frac{12}{2} \cdot \left[2 \cdot 15 + (12-1) \cdot 1{,}5\right]$ $= 279$ (triệu đồng). Phương án 2: Lương mỗi quý của công nhân là cấp số nhân với $u_1 = 3 \cdot 5 = 15$ và công bội $q = 1 + 3 \cdot 0{,}05 = 1{,}15$. Như vậy sau ba năm tức là 12 quý thì tổng số lương công nhân nhận được là $S_{12} = 15 \cdot \frac{1-1{,}15^{12}}{1-1{,}15} \approx 435{,}03$ (triệu đồng). Vậy theo phương án 2 thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn.
Chữa bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Nhận biết cấp số nhân, tìm các yếu tố của một cấp số nhân: Bài tập 2.15, 2.16, 2.17.
- Tính tổng n số hạng đầu của cấp số nhân: Bài tập 2.18.
- Bài toán thực tế liên quan đến cấp số cộng: Bài tập 2.19, 2.20, 2.21.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

2.15. a) Công bội là $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{1} = 4$.

Như vậy $u_5 = 1 \cdot 4^4 = 256$ và $u_{100} = 1 \cdot 4^{99} = 4^{99}$.

b) Công bội là $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$.

Như vậy $u_5 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{128}$ và $u_{100} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{99} = -\frac{2}{4^{99}} = -\frac{1}{2^{197}}$.

2.16. a) Ta có $u_1 = 5; u_2 = 10; u_3 = 15; u_4 = 20; u_5 = 25$.

Do $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên dãy số đã cho không là cấp số nhân.

b) Ta có $u_1 = 5; u_2 = 25; u_3 = 125; u_4 = 625; u_5 = 3125$. Chứng minh được dãy số đã cho là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và công thức dãy số dưới dạng tổng quát là $u_n = 5 \cdot 5^{n-1}$.

c) Ta có $u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 6; u_4 = 24; u_5 = 120$.

Do $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên dãy số đã cho không là cấp số nhân.

d) Ta có $u_1 = 1; u_2 = 5; u_3 = 25; u_4 = 125; u_5 = 625$. Chứng minh được dãy số đã cho là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và công thức dãy số dưới dạng tổng quát là $u_n = 1 \cdot 5^{n-1}$.

2.17. Gọi số hạng đầu và công bội của cấp số nhân là u_1 và q.

Khi đó ta có $\begin{cases} u_6 = 96 \\ u_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^5 = 96 & (1) \\ u_1 \cdot q^2 = 12. & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$. Suy ra $u_1 = 3$.

Vậy số hạng thứ 50 của cấp số nhân là $u_{50} = u_1 \cdot q^{49} = 3 \cdot 2^{49}$.

2.18. Ta có tổng n số hạng đầu của cấp số nhân bằng 5 115 nên

$$5 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 5\,115 \Leftrightarrow 2^n - 1 = 1\,023 \Leftrightarrow 2^n = 1\,024 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy ta phải lấy tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân để có tổng bằng 5 115.

2.19. Giá trị còn lại của chiếc máy ủi sau mỗi năm lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3000 \cdot 0{,}8 = 2400$ và công bội $q = 1 - 20\% = 0{,}8$.

Giá trị còn lại của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là

$$u_5 = u_1 \cdot q^4 = 983{,}04 \text{ (triệu đồng).}$$

2.20. Dân số của quốc gia đó trong từng năm lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 97$ và công bội q = 1,0091.

Dân số của quốc gia đó vào năm 2030 ứng với số hạng

$$u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 97 \cdot (1{,}0091)^{10} \approx 106{,}2.$$

Vậy dân số của quốc gia đó vào năm 2030 là khoảng 106,2 triệu người.

2.21. Ta thấy lượng thuốc trong máu sau khi tiêm mỗi ngày sẽ lập thành cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 50$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Như vậy tổng lượng thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp là

$$S_{10} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 50 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} \approx 99{,}9 \text{ (mg).}$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương (có thể chuẩn bị slides dạng sơ đồ hoá).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

2.22. C. **2.23.** D. **2.24.** A.

2.25. B. **2.26.** C.

2.27. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, số tiếng chuông đồng hồ quả lắc báo giờ lập thành một cấp số cộng gồm 12 số hạng, với số hạng đầu là 1 và công sai là 1.

Tổng của 12 số hạng này là $S = 78$.

2.28. Ta có: 24 giờ = 24 . 3 . 20 = 72 . 20 (phút).

Như vậy, sau 24 giờ, tức là sau 72 chu kì phân chia, từ tế bào ban đầu sẽ phân chia thành 2^{72} tế bào.

2.29. a) Gọi công sai của cấp số cộng là d ta có

$2u_k = (u_k - d) + (u_k + d) = u_{k-1} + u_{k+1}\ \forall k \geq 2,$ từ đây suy ra điều phải chứng minh.

b) Nếu công bội của cấp số nhân là $q = 0$ thì cấp số nhân có dạng u_1, 0, 0, 0, ..., 0, ... thì đẳng thức là hiển nhiên.

Nếu $q \neq 0$ ta có $u_k^2 = \dfrac{u_k}{q} \cdot (u_k \cdot q) = u_{k-1} \cdot u_{k+1}\ \forall k \geq 2,$ từ đây suy ra điều phải chứng minh.

2.30. Giả sử ba số đã cho theo thứ tự lập thành cấp số cộng là x, y, $21 - (x + y)$ (vì tổng của ba số bằng 21). Do ba số này lập thành cấp số cộng nên

$$y - x = \left[21 - (x + y)\right] - y \Leftrightarrow 3y = 21 \Leftrightarrow y = 7.$$

Khi đó 3 số đã cho có dạng: x, 7, $14 - x$.

Bởi vì nếu lần lượt thêm các số 2; 3; 9 vào ba số đó thì được ba số $x + 2; 10; 23 - x$ lập thành một cấp số nhân nên

$$\frac{10}{x+2} = \frac{23-x}{10} \Leftrightarrow (x+2)(23-x) = 100 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 54 = 0 \Leftrightarrow x \in \{3; 18\}.$$

Vậy ta có hai bộ số cần tìm là (3; 7; 11) và (18; 7; –4).

Chú ý. Cách giải trên tránh được cách dùng hệ ba phương trình ba ẩn, là kiến thức HS không được học trong SGK.

2.31. a) Gọi u_n $(1 \leq n \leq 25)$ là độ cao của bậc cầu thang thứ n so với sàn tầng một.

Nhận thấy u_n là cấp số cộng với $u_1 = 16$ và công sai $d = 16$.

Suy ra $u_n = u_1 + (n-1)d = 16n$.

Vậy độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân là $v_n = u_n + 50 = 16n + 50$ (cm).

b) Độ cao của sàn tầng thứ hai so với mặt sân chính là độ cao của bậc cầu thang thứ 25 so với mặt sân và bằng $v_{25} = 16 \cdot 25 + 50 = 450$ (cm).

2.32. Gọi S_n là tổng diện tích hình vuông được tô ở bước thứ n. Ta có $S_1 = \frac{1}{9}$.

Bước 2 nhiều hơn bước 1 là 8 hình vuông có diện tích $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9^2}$.

Suy ra $S_2 = S_1 + 8 \cdot \frac{1}{9^2}$.

Bước 3 nhiều hơn bước 2 là $8 \cdot 8 = 8^2$ hình vuông diện tích $\frac{1}{9^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9^3}$.

Suy ra $S_3 = S_2 + 8^2 \cdot \frac{1}{9^3}$.

Bước 4 nhiều hơn bước 3 là $8^2 \cdot 8 = 8^3$ hình vuông diện tích $\frac{1}{9^3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9^4}$.

Suy ra $S_4 = S_3 + 8^3 \cdot \frac{1}{9^4}$.

Bước 5 nhiều hơn bước 4 là $8^3 \cdot 8 = 8^4$ hình vuông diện tích $\frac{1}{9^4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9^5}$.

Suy ra $S_5 = S_4 + 8^4 \cdot \frac{1}{9^5}$.

Vậy sau 5 bước thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là

$$S_5 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \frac{8^3}{9^4} + \frac{8^4}{9^5} \approx 0{,}445 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Chú ý. Tổng quát, nếu quá trình lặp lại n lần thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh sẽ là

$$S_n = \frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \ldots + \frac{8^{n-1}}{9^n}.$$

Nhận thấy S_n là tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{9}$, công bội $q = \frac{8}{9}$.

Do đó $S_n = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}{\frac{1}{9}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

Chương III. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

Chương này thuộc mạch kiến thức Thống kê và Xác suất, bao gồm toàn bộ nội dung của phần Thống kê trong mạch Thống kê và Xác suất của chương trình lớp 11. Nội dung chương trình bày về các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm bao gồm số trung bình, trung vị, tứ phân vị và mốt.

Các số đặc trưng này đã được trình bày ở lớp 10 cho mẫu số liệu không ghép nhóm.

2 Cấu tạo chương

Tổng thời lượng: 4 tiết.

Nội dung:

Bài 8. Mẫu số liệu ghép nhóm (1 tiết)

Bài 9. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm (2 tiết)

Bài tập cuối chương III (1 tiết)

3 Một số điểm cần lưu ý

Khi có mẫu số liệu gốc $x_1, x_2, ..., x_n$ ta sẽ tính được các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu này. Tuy nhiên, trong một số trường hợp ta chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm là xấp xỉ cho các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu gốc.

Cần phải hiệu chỉnh mẫu số liệu ghép nhóm trước khi tính các số đặc trưng cho mẫu số liệu ghép nhóm của số liệu rời rạc.

Kết thúc phần Thống kê, giáo viên nên có một bài kiểm tra ngắn để biết được mức độ hiểu bài của HS. Việc đánh giá mức độ hiểu bài ở phần Thống kê cũng có thể thực hiện thông qua việc cho HS thực hiện các yêu cầu trong hoạt động trải nghiệm.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 8. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

HS đọc và giải thích được mẫu số liệu ghép nhóm.

HS chuyển được mẫu số liệu không ghép nhóm về mẫu số liệu ghép nhóm.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực giao tiếp toán học thông qua việc đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm; rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm về mẫu số liệu ghép nhóm theo tình huống thực tế.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

HS nên ôn lại về số liệu liên tục, số liệu rời rạc. Số liệu mà giữa hai số bất kì vẫn có thể xuất hiện một số ở giữa gọi là số liệu liên tục. Số liệu không có tính chất này gọi là số liệu rời rạc. Dạng hay gặp của số liệu liên tục là số liệu thu được từ các phép đo như chiều cao, cân nặng, nhiệt độ, thời gian, ... Dạng hay gặp của số liệu rời rạc là số liệu đếm số phần tử của một tập nào đó, ví dụ số HS trong lớp học, số sản phẩm một công nhân làm được trong ngày, ... Người ta thường dùng biểu đồ cột để biểu diễn số liệu rời rạc và tổ chức đồ để biểu diễn số liệu liên tục.

Đối với số liệu liên tục, các nhóm số liệu có thể được cho dưới dạng [a; b), (a; b], [a; b] $(a, b \in \mathbb{R})$. Tuy nhiên, để đơn giản, SGK quy ước nhóm số liệu được cho dưới dạng [a; b), riêng nhóm số liệu cuối cùng có thể là [a; b]. Đối với số liệu rời rạc, nhóm số liệu thường được cho ở dạng $k_1 - k_2$ $\left(k_1, k_2 \in \mathbb{N}\right)$, nhóm này gồm các giá trị $k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2$.

Việc ghép nhóm mẫu số liệu có tính tương đối nên hai HS khác nhau có thể ghép nhóm theo các cách khác nhau. Khi kiểm tra, đánh giá nếu muốn có kết quả đồng nhất thì cần có thêm các chỉ dẫn về số nhóm, các điểm chia, ...

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

<table>
<tr><th>HOẠT ĐỘNG</th><th>MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU</th><th>GỢI Ý THỰC HIỆN</th></tr>
<tr><td>Nêu vấn đề</td><td>Khơi gợi động cơ, đưa ra một tình huống dẫn đến việc biểu diễn dữ liệu ghép nhóm.</td><td>Giáo viên nêu tình huống, đặt câu hỏi. HS thảo luận và trả lời.</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. GIỚI THIỆU VỀ MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM</td></tr>
<tr><td>HĐ1</td><td>Giúp HS hiểu được vì sao phải dùng mẫu số liệu ghép nhóm thông qua một tình huống.
Giúp HS đọc, giải thích được mẫu số liệu ghép nhóm.</td><td>Dãy số liệu về tổng điểm (T) có 344 752 giá trị.
Nếu lập bảng tần số cho dãy số liệu (T) thì khó hình dung được bức tranh tổng thể về kết quả thi do bảng tần số này sẽ có rất nhiều giá trị, các giá trị rất gần nhau.
Đọc và giải thích: Có 23 thí sinh có tổng điểm ba môn nhỏ hơn 6, ..., có 12 thí sinh có tổng điểm ba môn từ 29 đến 30 điểm.</td></tr>
<tr><td>Khung kiến thức, câu hỏi và nhận xét</td><td>Khung kiến thức giới thiệu về mẫu số liệu ghép nhóm và dạng hay gặp của nhóm số liệu.
Nhận xét giúp HS hiểu khi nào thì có mẫu số liệu ghép nhóm.</td><td>Giáo viên giảng giải cho HS như nội dung hộp kiến thức, nhận xét.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 1</td><td>Giáo viên hướng dẫn HS đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm.</td><td>Thực hiện như SGK.</td></tr>
<tr><td>Luyện tập 1</td><td>HS luyện tập đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm.</td><td>Có 6 nhân viên đi từ nhà đến nơi làm việc mất từ 15 đến dưới 20 phút, ..., có 9 nhân viên đi từ nhà đến nơi làm việc mất từ 45 đến dưới 50 phút.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. GHÉP NHÓM MẪU SỐ LIỆU</td></tr>
<tr><td>HĐ2</td><td>HS làm quen với việc ghép nhóm số liệu.</td><td>Mẫu ghép nhóm thu được:
<table>
<tr><td>Chỉ số BMI</td><td>$<18,5$</td><td>$[18,5; 23)$</td><td>≥ 23</td></tr>
<tr><td>Số HS</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Khung kiến thức</td><td>Giúp HS biết được các bước thực hiện khi thực hiện ghép nhóm số liệu.</td><td>Thực hiện như SGK.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 2</td><td>Hướng dẫn HS ghép nhóm mẫu số liệu.</td><td>Thực hiện như SGK.</td></tr>
<tr><td>Luyện tập 2</td><td>HS luyện tập ghép nhóm mẫu số liệu.</td><td>Giá trị bé nhất: 40; Giá trị lớn nhất: 63.
Mẫu số liệu ghép nhóm:
<table><tr><td>Nhóm</td><td>[40; 45)</td><td>[45; 50)</td><td>[50; 55)</td><td>[55; 60)</td><td>[60; 65)</td></tr><tr><td>Tần số</td><td>5</td><td>7</td><td>11</td><td>7</td><td>5</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Vận dụng</td><td>Áp dụng vào một tình huống thực tế.</td><td>Tỉ lệ HS lớp 11 theo các cỡ áo:
Cỡ M: 22/36 ≈ 61,1%;
Cỡ L: 8/36 ≈ 22,2%;
Cỡ XL: 6/36 ≈ 16,7%.
Nếu may 500 áo đồng phục thì nên may số lượng mỗi cỡ áo là:
Cỡ M: 500.0,611 ≈ 306 chiếc;
Cỡ L: 500.0,222 ≈ 111 chiếc;
Cỡ XL: 500.0,167 ≈ 83 chiếc.</td></tr>
</table>

2. Lựa chọn bài tập

Bài tập của bài học này được chia thành hai nhóm chính, giúp HS hiểu được kiến thức và rèn luyện kĩ năng liên quan đến hai nội dung:

– Đọc và diễn giải mẫu số liệu ghép nhóm: Bài tập 3.1.

– Ghép nhóm mẫu số liệu: Bài tập 3.2, 3.3.

Giáo viên có thể lựa chọn 1 hoặc 2 bài thuộc mỗi vấn đề trên để giao cho HS làm ở nhà.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

3.1. a) Là mẫu số liệu ghép nhóm. Các nhóm gồm: [0; 50), [50; 100), [100; 150), [150; 200), [200; 250) với tần số tương ứng là 5, 12, 23, 17, 3. Có 5 sinh viên mỗi tháng chi cho thanh toán cước điện thoại với số tiền dưới 50 nghìn đồng. Giải thích tương tự cho các nhóm số liệu khác.

b) Là mẫu số liệu ghép nhóm. Các nhóm số liệu gồm [19; 22), [22; 25), [25; 28), [28; 31) với tần số tương ứng là 7, 15, 12, 6. Giải thích: Ở địa điểm này trong 40 ngày quan sát có 7 ngày có nhiệt độ từ 19 đến dưới 22 độ C. Giải thích tương tự cho các nhóm số liệu khác.

3.2. *HD*. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của mẫu số liệu từ đó xác định độ dài nhóm và các nhóm.

Giải. Giá trị lớn nhất của mẫu số liệu là 54, giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu là 5. Khoảng biến thiên là 54 – 5 = 49. Ta chia thành 6 nhóm có độ dài bằng nhau, chẳng hạn chọn độ dài mỗi nhóm là 8,5 và để cho thuận tiện ta chọn đầu mút trái là 4 ta được các nhóm là

$$[4; 12{,}5); [12{,}5; 21); [21; 29{,}5); [29{,}5; 38); [38; 46{,}5), [46{,}5; 55).$$

Đếm số giá trị thuộc mỗi nhóm, ta có mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Nhóm	[4; 12,5)	[12,5; 21)	[21; 29,5)	[29,5; 38)	[38; 46,5)	[46,5; 55)
Tần số	3	7	8	2	4	1

3.3. *HD*. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của mẫu số liệu từ đó xác định độ dài nhóm và các nhóm. Thực hiện tương tự như Bài tập 3.2.

Bài 9. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hiểu ý nghĩa, vai trò của các số đặc trưng của mẫu số liệu thực tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.

Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

Khi nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm 1 thì $m_1 + ... + m_{j-1} = 0$.

Khi tìm mốt cho mẫu số liệu ghép nhóm: Nếu nhóm mốt là nhóm 1 (nhóm đầu tiên) thì ta lấy $m_0 = 0$.

Nếu nhóm mốt là nhóm k (nhóm cuối cùng) thì ta lấy $m_{k+1} = 0$.

Khi có hai nhóm có tần số bằng nhau và lớn nhất ta tìm mốt cho từng nhóm mốt.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Khơi gợi động cơ, đưa ra một tình huống dẫn đến yêu cầu cần định nghĩa các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm.	Nhắc lại các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu không ghép nhóm đã học. Giới thiệu bài toán.
1. SỐ TRUNG BÌNH CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM		
HĐ1 và khung kiến thức	Giúp HS thấy rằng với mẫu số liệu ghép nhóm ta không thể tìm được giá trị chính xác cho số trung bình mà phải tính xấp xỉ bằng cách chọn một giá trị đại diện cho nhóm và xem như các giá trị trong nhóm đều bằng nhau.	Dựa trên mẫu khảo sát ta chỉ thu được số liệu dạng ghép nhóm nên không thể tính chính xác thời gian tự học trung bình. Để ước lượng thời gian tự học trung bình, trong mỗi nhóm ta chọn một giá trị đại diện và xem như các giá trị trong nhóm bằng nhau và bằng giá trị đại diện này.
Chú ý	Giúp HS xử lí khi gặp mẫu số liệu ghép nhóm cho số liệu rời rạc.	Thực hiện như SGK.
Ví dụ 1	Hướng dẫn HS tính số trung bình cho mẫu số liệu ghép nhóm.	Thực hiện như SGK.
Luyện tập 1	HS luyện tập tính số trung bình cho mẫu số liệu ghép nhóm.	Số trung bình: 8,4375.
Ý nghĩa	Giúp HS hiểu được ý nghĩa của số trung bình.	Thực hiện như SGK.
2. TRUNG VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM		
HĐ2, khung kiến thức	Giúp HS xác định được nhóm chứa trung vị và các bước tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.	Gợi ý HĐ2: Trung vị thuộc nhóm [5; 10).

Ví dụ 2	Hướng dẫn HS tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.	Thực hiện như SGK.
Luyện tập 2	HS luyện tập tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.	M_e thuộc nhóm 4. Áp dụng công thức ta có $M_e \approx 167,21$.
Ý nghĩa	Giúp HS hiểu được ý nghĩa của trung vị.	Thực hiện như SGK.
3. TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM		
HĐ3, khung kiến thức	Giúp HS xác định được nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ ba và các bước tìm hai tứ phân vị này của mẫu số liệu ghép nhóm.	Q_1 thuộc nhóm [5; 10). Q_3 thuộc nhóm [10; 15).
Ví dụ 3 và Nhận xét	Hướng dẫn HS tìm tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm. Nhận xét giúp học sinh xác định nhanh nhóm chứa các tứ phân vị.	Thực hiện như SGK.
Luyện tập 3	HS luyện tập tìm tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm.	Q_1 thuộc nhóm 3. Áp dụng công thức ta có $Q_1 = 160,4$. Q_3 thuộc nhóm 5. Áp dụng công thức ta có $Q_3 \approx 173,17$.
Ý nghĩa	Giúp HS hiểu được ý nghĩa của tứ phân vị.	Thực hiện như SGK.
4. MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM		
HĐ4, khung kiến thức và Lưu ý	Giúp HS thấy rằng với mẫu số liệu ghép nhóm ta không thể tìm được giá trị chính xác cho mốt của mẫu dữ liệu. Xác định được khoảng chứa mốt. Biết được cách tính mốt.	HĐ4 không tìm được giá trị chính xác cho mốt của mẫu số liệu gốc về thời gian xem ti vi của HS. Hợp lí nhất là mốt thuộc nhóm: [5; 10). HS thảo luận và đưa ra giá trị xấp xỉ cho mốt. Có thể có nhiều phương án, hai phương án HS có thể đưa ra là lấy điểm đại diện thuộc nhóm mốt để xấp xỉ hoặc tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm như trong Khung kiến thức để xấp xỉ.

Ví dụ 4	Hướng dẫn HS tính mốt cho mẫu số liệu ghép nhóm.	Thực hiện lời giải như sách giáo khoa.
Luyện tập 4	HS luyện tập tính mốt cho mẫu số liệu ghép nhóm.	Nhóm mốt là nhóm [10,5; 20,5). Áp dụng công thức ta có mốt là $M_o \approx 17,17$.
Ý nghĩa và Vận dụng	Giúp HS hiểu được ý nghĩa của mốt. Áp dụng các kiến thức đã học để tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm trong bài toán mở đầu và giải thích ý nghĩa.	Số trung bình: 63. Trung bình mỗi người đi xe máy vào mua xăng hết 63 000 đồng. Các tứ phân vị: $Q_1 = 41,5; Q_2 = 59; Q_3 = 84,75$. Có khoảng 25% số khách hàng mua xăng với số tiền ít hơn 41 500 đồng; 50% số khách hàng mua xăng với số tiền ít hơn 59 000 đồng; 75% số khách hàng mua xăng với số tiền ít hơn 84 750 đồng. Mốt $M_o \approx 51,2$. Số khách hàng mua xăng với số tiền khoảng 51 200 đồng là nhiều nhất.

2. Lựa chọn bài tập

Bài này gồm 4 bài tập. Các bài tập nhằm vào yêu cầu cần đạt cơ bản là tính và hiểu được ý nghĩa của các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm.

GV có thể lựa chọn 1 hoặc 2 bài để giao cho HS làm ở nhà.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

3.4. *HD*. a) Độ dài mỗi nhóm là 5, giá trị lớn nhất là 32 nên ta chia thành 7 nhóm.

b) Số trung bình của mẫu số liệu gốc (mẫu số liệu không ghép nhóm) chính xác hơn.

c) Tìm nhóm số liệu có tần số lớn nhất.

Giải. a) Độ dài mỗi nhóm là 5, giá trị lớn nhất là 32 nên ta chia thành 7 nhóm. Mẫu số liệu ghép nhóm thu được là:

Nhóm	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)
Tần số	5	11	11	9	1	1	2

Giá trị đại diện cho các nhóm tương ứng là: 2,5; 7,5; 12,5; 17,5; 22,5; 27,5; 32,5.

b) Số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm là 11,9. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 12,625. Số trung bình của mẫu số liệu gốc (mẫu số liệu không ghép nhóm) chính xác hơn.

c) Có 2 nhóm chứa mốt là nhóm [5; 10) và [10; 15).

3.5. a) Nhóm chứa mốt là [3; 3,5), $m_3 = 14; m_2 = 9; m_4 = 11; a_3 = 3; h = 0,5$.

Áp dụng công thức ta có: $M_o = 3 + \dfrac{(14-9)}{(14-9)+(14-11)} \cdot 0,5 = 3,3125$.

b) Chọn giá trị đại diện cho mỗi nhóm ta có

Tuổi thọ (năm)	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
Tần số	4	9	14	11	7	5

Tuổi thọ trung bình của 50 bình ắc quy này là

$$\overline{x} = \frac{(4.2,25 + \ldots + 5.4,75)}{50} = 3,48 \text{ (năm)}.$$

3.6. *HD*. Mẫu hiệu chỉnh có dạng

Điểm	[0; 9,5)	[9,5; 19,5)	[19,5; 29,5)	[29,5; 39,5)	[39,5; 49,5)
Số thí sinh	1	2	4	6	15
Điểm	[49,5; 59,5)	[59,5; 69,5)	[69,5; 79,5)	[79,5; 89,5)	[89,5; 99,5)
Số thí sinh	12	10	6	3	1

Tính các tứ phân vị theo công thức đã có. Lưu ý rằng điểm thi môn Toán là số không âm nên nhóm đầu tiên ta chọn là [0; 9,5) thay vì [-0,5; 9,5) để phù hợp với thực tế. Việc này không ảnh hưởng tới việc tính các tứ phân vị.

3.7. a) ĐS. Thời gian ngủ trung bình của các bạn nam là 6,52. Thời gian ngủ trung bình của các bạn nữ là 6,77. Thời gian ngủ trung bình của các bạn nữ lớn hơn của các bạn nam.

b) *HD*. Tìm Q_1 cho mẫu số liệu ghép nhóm sau khi gộp cả nam và nữ.

Giải. Mẫu số liệu ghép nhóm sau khi gộp cả nam và nữ là:

Thời gian	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Số học sinh	10	18	23	20	15

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm này là $Q_1 \approx 5,64$ nên 75% học sinh lớp 11 ngủ ít nhất 5,64 giờ.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương (có thể chuẩn bị slides dạng sơ đồ hoá).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

Chẳng hạn, có thể hệ thống kiến thức của chương này như sau:

Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số của các nhóm số liệu. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải, $a, b \in \mathbb{R}$. Nhóm số liệu rời rạc có thể cho dưới dạng k_1-k_2, trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, nhóm này gồm các giá trị $k_1, k_1+1, \ldots, k_2$. Khi đó, ta cần hiệu chỉnh trước khi tính toán các số đặc trưng.

Mẫu số liệu ghép nhóm xuất hiện khi ta không thể thu thập được số liệu chính xác hoặc do yêu cầu của bài toán mà ta phải ghép số liệu thành dạng ghép nhóm để thuận lợi cho việc tổ chức, đọc và phân tích số liệu.

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước.

Bước 2. Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

Không nên chia thành quá nhiều nhóm hoặc quá ít nhóm. Các nhóm không giao nhau, các nhóm nên có độ dài như nhau và tổng độ dài của các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

Giả sử ta không có mẫu số liệu gốc $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mà chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Gọi $n = m_1 + \ldots + m_k$ là cỡ mẫu, $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ là giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$.

Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm này được xác định như sau:

1. Số trung bình

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{n}.$$

2. Trung vị và các tứ phân vị

$$Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - \left(m_1 + \ldots + m_{p-1}\right)}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó, nhóm $[a_p; a_{p+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ r (r =1, 2, 3), m_p là tần số nhóm p. Trường hợp $p = 1$ thì ta qui ước $m_1 + \ldots + m_{p-1} = 0$.

3. Mốt

$$M_o = a_j + \frac{(m_j - m_{j-1})}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot h,$$

trong đó, nhóm $[a_j; a_{j+1})$ là nhóm chứa mốt (nhóm có tần số lớn nhất), quy ước $m_0 = m_{k+1} = 0$ và h là độ rộng của nhóm. Lưu ý, người ta chỉ định nghĩa mốt cho mẫu ghép nhóm có độ rộng các nhóm bằng nhau. Một mẫu có thể không có mốt hoặc có nhiều hơn một mốt.

Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm là xấp xỉ cho các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu gốc.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

3.8. C

3.9. B

3.10. B

3.11. B

3.12. C

3.13. Chọn giá trị đại diện cho các nhóm ta có mẫu sau:

Tuổi	2,5	9,5	19,5	44,5	80
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

Tổng số người là

$$n = 7{,}89 + \ldots + 7{,}66 = 97{,}33 \text{ (triệu người).}$$

Tuổi trung bình là

$$\overline{x} = \frac{7{,}89.2{,}5 + \ldots + 7{,}66.80}{97{,}33} \approx 35{,}2.$$

3.14. Cỡ mẫu $n = 100$. Nhóm chứa mốt là $[60; 80)$, độ dài $h = 20$.

Do đó mốt của mẫu số liệu là

$$M_o = 60 + \frac{8}{8+2} \cdot 20 = 76.$$

Ong có tuổi thọ khoảng 76 ngày là nhiều nhất.

3.15. *HD*. Tính Q_3 của mẫu số liệu.

ĐS. Tứ phân vị thứ 3 của mẫu số liệu là $Q_3 \approx 35{,}42$. Vậy 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam là những trường có điểm chuẩn hoá lớn hơn hoặc bằng 35,42.

Chương IV. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

- Ở lớp 11, HS bắt đầu làm quen với Hình học không gian, môn học nghiên cứu tính chất của các hình trong không gian ba chiều. Mặc dù HS đã được làm quen với các hình khối cơ bản ở những lớp dưới trong phần Hình học trực quan, sự hiểu biết của các em về các hình không gian vẫn còn thiếu tính hệ thống và sự chặt chẽ về mặt toán học. Một trong những mục đích chính của chương này là cung cấp các kiến thức cơ sở về Hình học không gian, từ đó làm sáng tỏ các khái niệm và tính chất của các hình không gian mà các em đã được giới thiệu ở những lớp dưới.
- Phần Hình học không gian ở lớp 11 được chia thành 2 phần: phần 1 (chương IV) đề cập đến quan hệ song song và phần 2 (chương VII) đề cập đến quan hệ vuông góc. Chương IV, tương ứng với phần 1, không chỉ cung cấp các khái niệm cơ sở về điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian mà còn tập trung nghiên cứu quan hệ song song giữa hai đối tượng là đường thẳng và mặt phẳng, từ đó tạo nên tiền đề để HS tiếp tục học về quan hệ vuông góc trong không gian cũng như học về Hình học giải tích ở lớp 12 sau này. Cụ thể, trong chương này HS sẽ được học về quan hệ song song giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng và giữa hai mặt phẳng. Hoàn toàn tương tự, mối quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng và giữa hai mặt phẳng sẽ là nội dung chính của chương VII.

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 5 bài và một tiết Bài tập cuối chương, được thực hiện trong 15 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 10. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	3 tiết
Bài 11. Hai đường thẳng song song	3 tiết
Bài 12. Đường thẳng và mặt phẳng song song	2 tiết
Bài 13. Hai mặt phẳng song song	4 tiết
Bài 14. Phép chiếu song song	2 tiết
Bài tập cuối chương IV	1 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Chương này để cập đến quan hệ liên thuộc giữa các đối tượng cơ bản như điểm, đường thẳng và mặt phẳng, quan hệ song song giữa đường thẳng và mặt phẳng. Do đó, các bài tập cơ bản chủ yếu xoay quanh các tính chất định tính về sự liên thuộc hay tính song song, ví dụ như: xác định giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng; xác định giao tuyến của hai mặt phẳng; chứng minh hai đường thẳng/ mặt phẳng song song... Ngoài ra một số các bài tập tính toán thường xoay quanh định lí Thalès trong không gian.
- SGK Toán 11 giảm nhẹ một số nội dung lí thuyết: tính duy nhất của mặt phẳng chứa một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường thẳng còn lại, hay tính chất hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến (nếu có) song song với hai đường thẳng đó... chỉ được nhắc đến như các tính chất được thừa nhận (hoặc không được để cập đến). Đối với các bài tập mà lời giải cần sử dụng đến các kết quả này, GV có thể sử dụng linh hoạt các kết quả tương đương để nhận được lời giải thay thế.
- Một số các tính chất hoàn toàn có thể được chứng minh một cách chặt chẽ về mặt toán học, ví dụ như: hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau; tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng và song song với mặt phẳng đó... Tuy nhiên việc chứng minh các tính chất như vậy là tương đối phức tạp và do đó được thay thế bằng các hoạt động dễ quan sát và thừa nhận. GV có thể linh hoạt trong các hoạt động dạy học này, đồng thời chú trọng vào phần vận dụng kiến thức để giải quyết các bài toán thực tế.
- Đối với các nội dung kiến thức cần HS giải thích chặt chẽ, ví dụ như điều kiện để đường thẳng song song với mặt phẳng, hoặc điều kiện để hai mặt phẳng song song, thì cách giải thích thường sử dụng phương pháp phản chứng. Đối với những HS chưa quen thuộc với phương pháp này, GV có thể tìm một cách diễn đạt khác cho phù hợp.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 10. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết các quan hệ liên thuộc cơ bản giữa điểm, đường thẳng với mặt phẳng trong không gian.

- Mô tả ba cách xác định mặt phẳng: Mặt phẳng được xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó, hoặc nếu biết một điểm và một đường thẳng (không đi qua điểm đó) nằm trong mặt phẳng đó, hoặc biết hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng đó.
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng và vận dụng vào giải bài tập.
- Nhận biết được hình chóp và hình tứ diện.
- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học), yêu nước (chẳng hạn thông qua việc tìm hiểu về cửu đỉnh ở cố đô Huế).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua việc sử dụng các kiến thức về cách xác định một mặt phẳng để thực hiện các Vận dụng 1, 2).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Nếu ở lớp 6 HS đã được giới thiệu các khái niệm cơ bản về điểm, đường thẳng và mối quan hệ liên thuộc giữa chúng thì ở lớp 11 các em sẽ tiếp tục được làm quen với một số khái niệm cơ bản của hình học, đó là mặt phẳng và mối quan hệ liên thuộc giữa điểm, đường thẳng và mặt phẳng. Cũng giống như các khái niệm cơ bản của Hình học phẳng ở lớp 6, các khái niệm cơ bản của Hình học không gian vừa được đề cập ở trên cũng được phát biểu dưới dạng các tính chất được thừa nhận (hay ở dạng tiên đề). GV cần đưa nhiều hình ảnh minh hoạ trực quan về các khái niệm này để HS dần hình thành được những cảm nhận, trực giác về Hình học không gian.

2. Tính chất "các kết quả đã biết của Hình học phẳng đều đúng khi xét trên mỗi mặt phẳng trong không gian" là khá trực giác và rõ ràng với HS. Do đó, tính chất này không được phát biểu dưới dạng khung kiến thức mà thay vào đó là ở dạng nhận xét. Trong quá trình giảng dạy, GV có thể lưu ý thêm với HS về tính chất khá hiển nhiên này.

3. Có ba cách để xác định một mặt phẳng, trong đó cách xác định dựa trên ba điểm không thẳng hàng được thừa nhận, hai cách xác định còn lại đều có thể được suy ra từ cách đầu tiên. Trong khuôn khổ thời gian cho phép, GV có thể giới thiệu với HS một trong hai (hoặc cả hai) cách trên. Tuy nhiên, GV nên tập trung vào việc giúp HS hiểu được cách mặt phẳng được tạo thành (ví dụ nếu mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d không đi qua A thì mặt phẳng đó được tạo bởi A và hai điểm B, C thuộc d); GV không nên tập trung vào việc chứng minh *tính duy nhất* của mặt phẳng trong cả hai cách xác định đó.

4. GV khuyến khích HS tìm hiểu thêm các hình ảnh về điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian và vận dụng các kiến thức trong bài học để giải thích một số hiện tượng trong thực tiễn. Các tình huống như trong Vận dụng 1 và Vận dụng 2 là khá phổ biến trong cuộc sống.

5. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, hình ảnh liên quan đến các nội dung trong bài, một số đồ vật có 2 chân và 3 chân.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết.

+ Tiết 1: Từ đầu đến hết Vận dụng 1.

+ Tiết 2: Từ HĐ4 đến hết Vận dụng 2.

+ Tiết 3: Từ mục 4 đến hết, Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU		
Khái niệm mở đầu	HS làm quen với hình ảnh của mặt phẳng trong không gian và cách biểu diễn mặt phẳng trên giấy hoặc trên bảng.	– Cũng giống như điểm và đường thẳng, mặt phẳng là một đối tượng không được định nghĩa. GV cần hướng dẫn HS quan sát và giúp HS có cảm nhận trực quan về mặt phẳng. – GV triển khai như trong SGK và có thể lấy thêm các hình ảnh khác (mặt phẳng trong thực tiễn thường có hình ảnh là các bề mặt nhẵn và phẳng). GV

		nên đảm bảo có đủ các mặt phẳng ở các vị trí khác nhau như mặt phẳng thẳng đứng, mặt phẳng nằm ngang hoặc mặt phẳng nằm nghiêng. – Cần chú ý rằng mặt phẳng (trong Toán học) là "vô hạn" nên hầu hết các hình ảnh chỉ biểu diễn *một phần* của mặt phẳng.
HĐ1	HS quan sát và nhận biết hình ảnh về điểm thuộc mặt phẳng, từ đó đưa ra được những hình ảnh tương tự.	GV triển khai dựa theo SGK. GV có thể lấy thêm các hình ảnh khác về điểm thuộc mặt phẳng, ví dụ như một chấm mực trên mặt giấy hay một lỗ thủng do kim đâm trên mặt vải...
Khung kiến thức	Khái niệm điểm thuộc/ không thuộc mặt phẳng và các thuật ngữ, kí hiệu thường sử dụng.	GV triển khai theo SGK.
Chú ý	HS nhận biết được cách biểu diễn các hình không gian trên mặt phẳng như mặt giấy hoặc mặt bảng.	– GV trình bày theo SGK. GV lưu ý rằng HS có thể đã làm quen với cách biểu diễn các hình không gian trong phần Hình học trực quan ở các lớp dưới, tuy nhiên các cách biểu diễn đó chưa được phát biểu một cách có hệ thống; chú ý này nhắc lại và làm rõ hơn các cách biểu diễn đó. Cơ sở của các quy tắc biểu diễn này sẽ được trình bày trong "Bài 14: Phép chiếu song song". – Để minh hoạ các quy tắc được nêu trong SGK, GV có thể lấy ví dụ về hình biểu diễn của các hình không gian mà HS đã được làm quen trong phần Hình học trực quan ở các lớp dưới, ví dụ như hình biểu diễn của hình lập phương, hình lăng trụ tam giác, hình chóp tam giác đều.

2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN		
HĐ2	HS quan sát và thừa nhận rằng qua hai điểm (trong không gian) có đúng một đường thẳng.	GV triển khai như trong SGK. HS có thể sẽ thấy tính chất này khá quen thuộc vì tính chất tương tự như vậy đã được đề cập đến trong phần Hình học phẳng ở lớp 6. GV có thể nhấn mạnh thêm rằng tính chất đã biết trong Hình học phẳng cũng đúng trong Hình học không gian.
?	HS sử dụng tính chất vừa học để xác định số đường thẳng đi qua hai trong số ba điểm không thẳng hàng.	GV triển khai như trong SGK. Có thể gọi tên ba điểm là A, B, C để tiện cho việc gọi tên các đường thẳng. *Đáp án*: 3. *Chú ý*: Dù không đề cập tới nhưng ta vẫn ngầm hiểu ba điểm không thẳng hàng (trong không gian) là ba điểm không cùng thuộc một đường thẳng.
HĐ3	HS quan sát và thừa nhận rằng có đúng một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng và có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.	– GV triển khai như trong SGK. *Chú ý*: Trong câu hỏi a, khi HS nhận thấy rằng nếu ba đỉnh trên mặt màu đỏ của khối rubik nằm trên mặt bàn thì toàn bộ mặt màu đỏ cũng nằm trên mặt bàn (hay mặt màu đỏ trùng với mặt bàn). Từ đó GV có thể khái quát hiện tượng này bằng tính chất "có đúng một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng". GV nhấn mạnh thêm rằng nếu không có điều kiện "không thẳng hàng" thì tính chất trên không còn đúng. – Sau khi HS đã trả lời được câu hỏi b, GV có thể nhận xét rằng bốn đỉnh của khối rubik không cùng nằm trên một mặt phẳng, từ đó dẫn tới kiến thức trọng tâm như trong phần khung kiến thức.

Khung kiến thức	Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.	GV trình bày như trong SGK.
Nhận xét	HS nhận biết khái niệm "đồng phẳng".	GV triển khai như trong SGK. Hình ảnh cửu đỉnh ở cố đô Huế, mỗi đỉnh có ba chân, là một ví dụ minh hoạ cho tính chất: "Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng".
❓	HS nhận biết được điều kiện "không thẳng hàng" trong khung kiến thức là quan trọng.	– GV triển khai như trong SGK. *Đáp án*: Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm thẳng hàng. – GV nên đưa thêm các ví dụ minh hoạ cho nhận định trên trong thực tiễn, ví dụ cố định hai điểm (trên mặt bàn hoặc trên mặt bảng) và yêu cầu HS chỉ rõ các mặt phẳng đi qua hai điểm đó.
Ví dụ 1	HS xác định được mặt phẳng tạo bởi ba điểm không thẳng hàng.	GV triển khai theo SGK. Trong Ví dụ 1, GV có thể sử dụng màu sắc (hoặc một khối rubik như trong HĐ3) để giúp HS nhận ra các mặt phẳng tạo được.
Luyện tập 1	HS nhận biết được rằng nếu bốn điểm đồng phẳng thì các mặt phẳng đi qua ba trong bốn điểm đó trùng nhau.	GV gọi một số HS trả lời và nhận xét. *Đáp án*: Có đúng 1 mặt phẳng đi qua ba trong số bốn đỉnh của tứ giác.
Vận dụng 1	HS vận dụng tính chất "có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng" để giải thích cấu tạo ba chân của một số đồ vật trong thực tiễn.	– Để minh hoạ, GV có thể chuẩn bị một đồ vật có 2 chân, một đồ vật có 3 chân và yêu cầu HS đặt hai đồ vật đó trên nền nhà. GV yêu cầu HS quan sát xem đồ vật nào có thể đứng vững (hoặc ở trạng thái thăng bằng), từ đó đưa ra nhận xét.

		Gợi ý: Ba chân của chân đỡ máy ảnh, giá treo tranh hay kiềng ba chân treo nồi xác định duy nhất một mặt phẳng (mặt phẳng này đi qua ba đầu tiếp xúc với mặt đất của ba chân). Do đó, khi đặt các đồ vật này trên một mặt phẳng, ví dụ như nền nhà, thì mặt phẳng trên trùng với nền nhà. Điều này giúp các đồ vật có thể giữ được trạng thái thăng bằng, vững chãi mà không bị nghiêng hay đổ. – Sau đó GV cũng có thể yêu cầu HS quay trở lại với hình ảnh cửu đỉnh ở cố đô Huế và nhận xét rằng với cấu tạo gồm ba chân, cửu đỉnh nhìn rất vững chãi và cân đối.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
HĐ4	HS quan sát và nhận biết được tính chất: "Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó".	– GV triển khai như trong SGK. GV nhấn mạnh rằng sợi dây khi căng cho ta hình ảnh về một đường thẳng. – HĐ này dẫn đến khái niệm đường thẳng nằm trong mặt phẳng như trong phần Chú ý sau Khung kiến thức.
Khung kiến thức	Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.	GV triển khai như trong SGK.
Chú ý	HS nhận biết khái niệm và kí hiệu đường thẳng nằm trong mặt phẳng.	GV triển khai như trong SGK.

Ví dụ 2		GV triển khai như trong SGK.
Luyện tập 2	HS biết sử dụng tính chất "nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó" để xác định xem một đường thẳng có thuộc một mặt phẳng cho trước hay không.	HS tự thực hiện, GV có thể yêu cầu một hoặc hai HS trình bày trên bảng và nhận xét lời giải của HS. *Gợi ý:* Điểm N thuộc đường thẳng AB và đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng (ABC) nên điểm N thuộc mặt phẳng (ABC). Vì đường thẳng MN chứa hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng MN thuộc mặt phẳng (ABC).
HĐ5	HS quan sát và nhận biết được tính chất: "Nếu hai mặt phẳng có điểm chung thì tập hợp các điểm chung là một đường thẳng".	– GV triển khai theo SGK. GV nhấn mạnh rằng mặt nước (lúc tĩnh lặng) và thành bể là hai mặt phẳng, và phần giao của hai mặt phẳng này là đường mực nước trên thành bể. GV có thể tiến hành HĐ này như một thí nghiệm trực tiếp trên lớp với một dụng cụ đựng nước hình hộp chữ nhật và nước màu (để HS dễ quan sát đường mực nước). GV có thể thực hiện thí nghiệm nhiều lần, mỗi lần đổ một lượng nước khác nhau hoặc đặt nghiêng dụng cụ chứa nước (ở các góc khác nhau) so với mặt bàn để HS quan sát đường mực nước. – Sau HĐ này HS được giới thiệu về khái niệm giao tuyến của hai mặt phẳng.
Khung kiến thức	Nếu hai mặt phẳng có điểm chung thì tập hợp các điểm chung là một đường thẳng.	GV trình bày theo SGK.
Ví dụ 3	HS sử dụng tính chất "nếu hai mặt phẳng có điểm chung thì tập hợp các điểm	– GV triển khai theo SGK. – GV lưu ý HS cách tìm giao tuyến của hai mặt phẳng: Muốn tìm giao tuyến

	chung là một đường thẳng" để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.	của hai mặt phẳng ta chỉ cần xác định hai điểm chung của hai mặt phẳng đó.
Nhận xét	HS thừa nhận tính chất "trên mỗi mặt phẳng, tất cả các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng".	Sau Ví dụ 3, GV nhấn mạnh với HS tính chất "hiển nhiên" trong Nhận xét.
Luyện tập 3	Như Ví dụ 3.	GV yêu cầu HS tự thực hiện. *Đáp án*: *SA* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*SBM*) và (*SCN*).
3. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG		
HĐ6	HS mô tả được thêm hai cách xác định mặt phẳng: mặt phẳng đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó; mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.	– GV triển khai theo SGK. – GV có thể nhấn mạnh thêm rằng mặt phẳng (*ABC*) là mặt phẳng duy nhất chứa *A* và *d* (đồng thời cũng là mặt phẳng duy nhất chứa *AB* và *BC*). *Chú ý*: Để "chứng minh" tính duy nhất của mặt phẳng (*ABC*) trong trường hợp đầu tiên có thể hình dung rằng nếu một mặt phẳng (*P*) chứa *d* thì (*P*) luôn "xoay quanh" trục là đường thẳng *d*. Khi đó chỉ có đúng một vị trí của (*P*) mà tại đó (*P*) chứa điểm *A*. Cách giải thích trực quan này sẽ giúp HS dễ dàng giải thích được tình huống trong Vận dụng 2. Lưu ý rằng cả hai cách xác định mặt phẳng này đều dựa trên tính xác định duy nhất của mặt phẳng đã thừa nhận ở mục 2: Một mặt phẳng được xác định khi biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó.
Khung kiến thức	Hai cách xác định một mặt phẳng.	GV trình bày như trong SGK.

Ví dụ 4	HS biết xác định mặt phẳng khi biết một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó, từ đó tìm được giao tuyến của các mặt phẳng vừa xác định.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 4	Như Ví dụ 4.	*Gợi ý:* Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của c với a, b. Khi đó giao tuyến của mp(S, a) và mp(S, c) là đường thẳng SP, giao tuyến của mp(S, b) và mp(S, c) là đường thẳng SQ.
Vận dụng 2	HS sử dụng tính chất "một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó" để giải thích nguyên lý hoạt động của nam châm hít cửa.	– GV triển khai theo SGK. GV có thể dẫn dắt HS trả lời câu hỏi trong Vận dụng 2 bằng cách đặt câu hỏi như: "Tại sao chỉ cần một miếng nam châm nhỏ là cửa có thể được giữ cố định?". HS có thể tập trung nhiều hơn vào khía cạnh vật lí và đưa ra các câu trả lời như: "Nam châm hút cửa nên cửa sẽ được giữ cố định" hay "Cửa bị miếng nam châm hút nên sẽ bị giữ chặt". Trong trường hợp đó GV nên hướng HS suy nghĩ theo khía cạnh toán học bằng cách đặt câu hỏi như: "Vậy nếu cửa không được giữ bởi bản lề thì miếng nam châm có giữ cửa cố định được hay không?". Để củng cố thêm kiến thức về phần này cho HS, GV có thể đưa thêm câu hỏi: "Có cần thiết phải sử dụng hai miếng nam châm để giữ cửa hay không?". – Trong trường hợp HS được tiếp cận HĐ6 bằng phương pháp trực quan (như đã nói đến ở trên) thì GV có thể yêu cầu HS nhìn lại cách tiếp cận đó để giải thích tình huống này.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN		
HĐ7	HS mô tả được hình chóp chính xác về mặt toán học sau khi đã được trang bị các kiến thức về hình học không gian.	Chú ý rằng hình chóp (tam giác đều/ tứ giác đều) đã được giới thiệu một cách trực quan trong phần Hình học trực quan ở lớp 8. Dựa trên cơ sở đó, GV yêu cầu HS quan sát hình ảnh trong SGK và xác định những đặc điểm giống nhau của các hình, từ đó đưa ra định nghĩa tổng quát của hình chóp.
Khung kiến thức	Định nghĩa hình chóp và các thuật ngữ liên quan.	GV triển khai như trong SGK.
Chú ý	HS biết cách gọi tên hình chóp.	GV triển khai như trong SGK.
Ví dụ 5	HS nhận biết được số cạnh của một hình chóp tứ giác.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 5	HS nhận biết được các mặt của một hình chóp tứ giác.	GV yêu cầu cả lớp làm tập thể. *Đáp án*: Các mặt bên là (SAB), (SBC), (SCD), (SDA). Mặt đáy là $(ABCD)$.
HĐ8	HS nhận biết được hình tứ diện là một hình chóp đặc biệt.	GV triển khai theo SGK. *Đáp án*: Hình chóp có số đỉnh ít nhất là hình khối rubik. Hình chóp này có 6 cạnh và 4 mặt.
Khung kiến thức	Định nghĩa hình tứ diện và các thuật ngữ liên quan.	GV trình bày theo SGK.
Nhận xét	HS nhận biết được rằng nếu coi tứ diện là một hình chóp thì mỗi mặt của tứ diện đều có thể coi là mặt đáy.	GV trình bày theo SGK.
Ví dụ 6	HS sử dụng các kiến thức đã học để xác định giao điểm của	GV triển khai như trong SGK. Sau khi thực hiện Ví dụ 6, GV tóm tắt

	một đường thẳng và một mặt phẳng trong một tình huống cụ thể.	phương pháp xác định giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng.
Luyện tập 6		GV yêu cầu HS tự thực hiện. *Gợi ý:* Kéo dài *DE* cắt cạnh *BC* tại *G*. Trong mặt phẳng (*ADE*) đường thẳng *DF* cắt đường thẳng *AG* tại *P* thì *P* là giao điểm cần tìm.
Bài tập 4.1	HS nhận biết được các tính chất cơ bản về mối quan hệ liên thuộc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV có thể cho HS thảo luận nhóm. Đối với các khẳng định sai GV có thể yêu cầu HS chỉ ra một phản ví dụ (bằng hình ảnh).
Bài tập 4.3	HS sử dụng các tính chất thừa nhận để chứng minh một đường thẳng nằm trong một mặt phẳng.	GV có thể gợi ý HS suy nghĩ bằng cách đặt các câu hỏi như: "Làm thế nào để chứng minh *c* nằm trong (*P*)?" hoặc cụ thể hơn như: "*c* và (*P*) có điểm nào chung?".
Bài tập 4.5	HS xác định được giao tuyến của hai mặt phẳng.	GV nhắc lại phương pháp xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

3. Phân loại bài tập

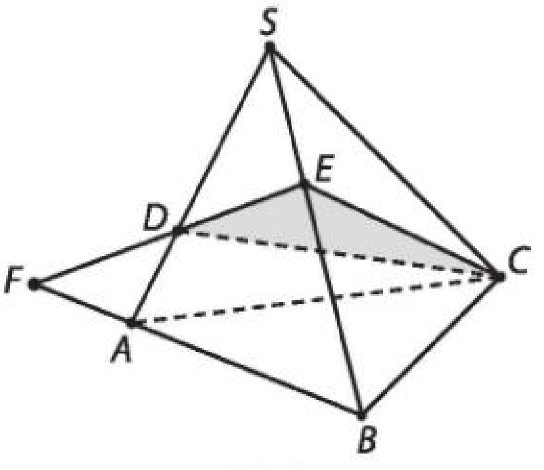
- Bài tập về mối quan hệ liên thuộc giữa điểm, đường thẳng và mặt phẳng: Bài 4.1, 4.2, 4.3.
- Bài tập về giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng, về giao tuyến của hai mặt phẳng: Bài 4.4, 4.5, 4.6.
- Bài tập vận dụng: Bài 4.7, 4.8.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

4.1. b), c).

4.2. (H.4.1). a) Các điểm *D*, *E* lần lượt thuộc đường thẳng *SA*, *SB* nên *D*, *E* thuộc mặt phẳng (*SAB*). Vì vậy đường thẳng *DE* nằm trong mặt phẳng (*SAB*).

b) Từ câu a, suy ra đường thẳng *DE* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAB*) và (*CDE*). Vì *F* thuộc *DE* nên *F* thuộc hai mặt phẳng đó.



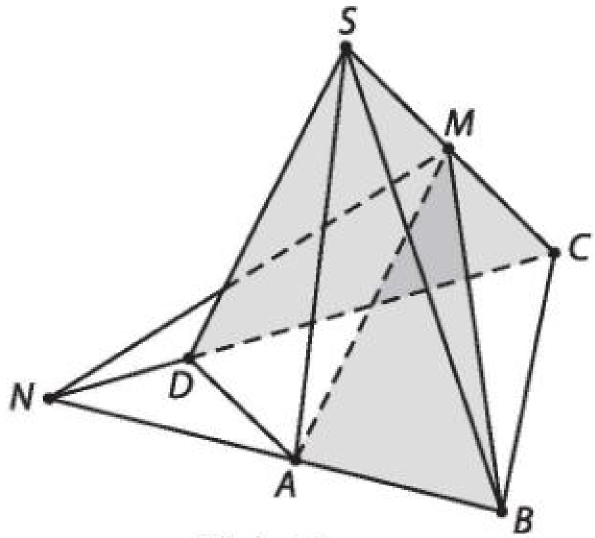
Hình 4.1

4.3. Giả sử đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b lần lượt tại hai điểm phân biệt M, N. Vì M thuộc a và a nằm trong (P) nên M thuộc (P). Tương tự, ta có N thuộc (P). Đường thẳng c có hai điểm phân biệt M, N cùng thuộc (P) nên c nằm trong (P).

4.4. (H.4.2). Điểm M thuộc mặt phẳng (ABM). Điểm N thuộc đường thẳng AB nên N cũng thuộc mặt phẳng (ABM). Vậy đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (ABM).

Điểm M thuộc SC nên M thuộc mặt phẳng (SCD). Điểm N thuộc đường thẳng CD nên N cũng thuộc mặt phẳng (SCD). Vậy đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SCD).

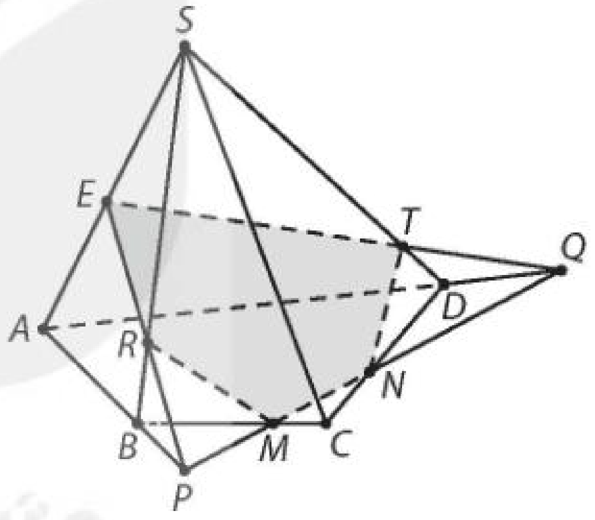
Từ các khẳng định trên suy ra đường thẳng MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABM) và (SCD).



Hình 4.2

4.5. (H.4.3). a) Trong mặt phẳng (SAB) gọi R là giao điểm của EP và SB thì R là giao điểm của mặt phẳng (E, d) và cạnh SB. Trong mặt phẳng (SCD) gọi T là giao điểm của EQ và SD thì T là giao điểm của mặt phẳng (E, d) và cạnh SD.

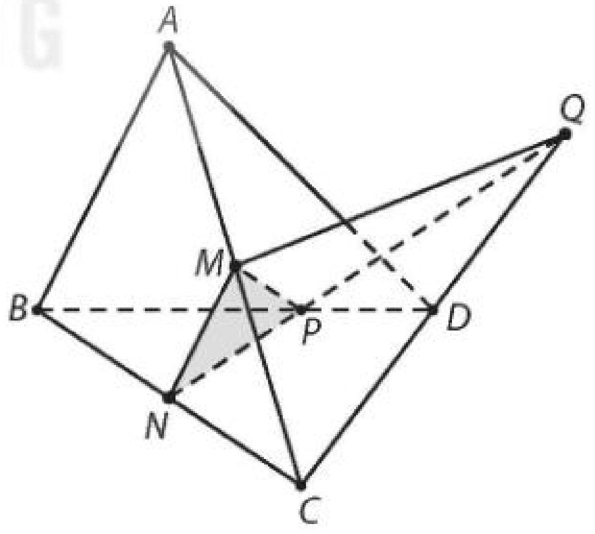
b) Giao tuyến của mặt phẳng (E, d) với các mặt (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) và $(ABCD)$ lần lượt là ER, RM, NT, ET và MN.



Hình 4.3

4.6. (H.4.4). a) Xét tam giác BCD có $BN = NC$ và $BP = 2\,DP$ nên đường thẳng NP cắt đường thẳng CD tại một điểm Q. Khi đó Q là giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b) Điểm M thuộc AC nên M thuộc mặt phẳng (ACD). Do đó M thuộc hai mặt phẳng (ACD) và (MNP). Từ câu a) suy ra Q cũng thuộc hai mặt phẳng (ACD) và (MNP). Vậy MQ là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (MNP).



Hình 4.4

4.7. Giải thích tương tự như Vận dụng 1.

4.8. Khi ấn dao để cắt giấy thì lưỡi dao di chuyển tạo thành một mặt phẳng. Mặt phẳng này và mặt phẳng chứa tờ giấy cắt nhau theo giao tuyến chính là đường cắt.

Bài 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết vị trí của hai đường thẳng trong không gian: hai đường thẳng trùng nhau, cắt nhau, song song và chéo nhau.
- Giải thích tính chất cơ bản của hai đường thẳng song song trong không gian: Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho; định lí ba đường giao tuyến.
- Nhận biết một vài tính chất của hai đường thẳng song song và biết áp dụng để giải một số bài tập đơn giản. Các tính chất thừa nhận bao gồm: hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau; hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó, hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Mô tả và giải thích một số hình ảnh thực tiễn có liên quan đến vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học), yêu nước (chẳng hạn thông qua việc tìm hiểu nghề dệt vải bằng khung cửi, các em hiểu hơn về đất nước Việt Nam và có cảm hứng học tập góp phần xây dựng Tổ quốc).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua việc thực hiện các Vận dụng 1, 2 về vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian và về tính chất của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Khi tìm hiểu về vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ngoài các trường hợp hai đường thẳng trùng nhau, hai đường thẳng song song và hai đường thẳng cắt nhau (như đã biết trong hình học phẳng) còn có thêm một trường hợp nữa là hai đường thẳng chéo nhau. Khác với ba trường hợp đầu tiên (ở đó hai đường thẳng luôn đồng phẳng), ở trường hợp thứ tư hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng. Đây là một khái niệm mới đối với HS khi các em bắt đầu làm quen với Hình học không gian. GV cần đưa thêm hình ảnh minh hoạ về các đường thẳng chéo nhau trong thực tiễn để HS có thêm cảm nhận trực quan về khái niệm này.

2. Trong mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chúng song song. Tuy nhiên điều này không còn đúng trong Hình học không gian: hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau. Tương tự, hai đường thẳng phân biệt không song song thì có thể cắt nhau hoặc chéo nhau. GV cần giúp HS hiểu rõ được sự khác biệt này giữa Hình học phẳng và Hình học không gian. GV có thể sử dụng sơ đồ cây để phân chia trường hợp và giúp HS có cái nhìn tổng thể về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian.

3. Tính chất "hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó, hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó" là tương đương với định lí về ba đường giao tuyến. Hai kết quả này có thể được sử dụng thay thế cho nhau trong các bài tập về xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

4. GV khuyến khích HS tìm hiểu thêm về hình ảnh của các đường thẳng song song, chéo nhau trong không gian, các mặt phẳng chứa các đường thẳng song song trong thực tiễn và liên hệ với các kết quả, tính chất được đề cập tới trong bài học.

5. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, hình ảnh liên quan đến các nội dung trong bài (ví dụ như các tuyến đường trên cao), một thanh gỗ hoặc gậy đủ dài.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết.

+ Tiết 1: Vị trí tương đối của hai đường thẳng (hết mục 1).

+ Tiết 2: Tính chất của hai đường thẳng song song (hết mục 2).

+ Tiết 3: "Em có biết?", Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giới thiệu sơ lược về hình ảnh của các đường thẳng trong không gian, giúp HS bước đầu	GV có thể sử dụng Hình 4.13 trong SGK hoặc đưa ra các hình ảnh tương tự, cần đảm bảo đủ các

	có cảm nhận về vị trí tương đối của các đường thẳng trong không gian.	vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.
1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG		
HĐ1	HS quan sát được các vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian và chỉ ra được các đường thẳng song song, các đường thẳng cắt nhau.	GV có thể yêu cầu HS quan sát Hình 4.13 và lần lượt trả lời các câu hỏi trong HĐ1. Chú ý rằng việc trả lời các câu hỏi a, b, c theo thứ tự sẽ giúp HS phân loại được vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian: hai đường thẳng có thể cắt nhau hoặc không cắt nhau; trong trường hợp hai đường thẳng không cắt nhau thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau.
Khung kiến thức	Các vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.	GV phát biểu như trong SGK.
?	HS tìm được một số hình ảnh về hai đường thẳng song song, hai đường thẳng chéo nhau trong thực tiễn.	GV gọi một vài HS trả lời. Có thể bắt đầu với hình ảnh có sẵn trong SGK như hình ảnh về các sợi vải trên khung cửi, hoặc hình ảnh về các tia laze phục vụ công tác an ninh.
Nhận xét	Nhấn mạnh khái niệm hai đường thẳng song song trong không gian và sự tồn tại duy nhất của mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.	GV có thể thực hiện hỏi đáp nhanh với HS, ví dụ như: – Hai đường thẳng không song song thì có cắt nhau không? – Hai đường thẳng không cắt nhau thì có song song không? – Hai đường thẳng không chéo nhau thì có song song không?
Ví dụ 1	HS quan sát được các đường thẳng đồng phẳng để xác định chúng cắt nhau hay song song (và từ đó kết luận chúng không chéo nhau).	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1		GV yêu cầu HS tự thực hiện. *Đáp án*: a) Hai đường thẳng AB và CD song song; hai đường thẳng AB

		và AC cắt nhau, hai đường thẳng AC và CD cắt nhau. b) Không có hai đường thẳng nào chéo nhau vì chúng cùng nằm trong mặt phẳng (SAB).
Ví dụ 2	HS quan sát được hai đường thẳng chéo nhau và biết lập luận để giải thích cho nhận định của mình.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2	HS quan sát và chỉ ra được hai đường thẳng chéo nhau.	HS tự thực hiện. GV cũng có thể yêu cầu HS giải thích câu trả lời của mình (tương tự như trong Ví dụ 2). *Đáp án*: a) BC, CD. b) SA, SD.
Vận dụng 1	HS thử nghiệm, quan sát vị trí của đường thẳng (gậy) với các đường thẳng khác (mép tường) và kết luận rằng không thể đặt được gậy như yêu cầu.	GV có thể yêu cầu HS thử đặt gậy ở một vài vị trí để quan sát và nhận xét về vị trí tương đối của gậy và mép tường. Chú ý rằng gậy được đặt sao cho đầu gậy dựa vào tường, tức là phải có lực tương tác từ tường lên đầu gậy và ngược lại. Vì vậy không thể xảy ra trường hợp toàn bộ chiếc gậy "nằm trên" tường. Bài tập vận dụng này yêu cầu HS kết hợp kiến thức vật lí và kiến thức toán học để có được câu trả lời cuối cùng.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	Nhắc lại các vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.	GV gọi HS trả lời. GV có thể yêu cầu HS đưa thêm các hình ảnh minh hoạ cho mỗi vị trí tương đối của hai đường thẳng.

2. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG		
HĐ2	HS giải thích được rằng *trong không gian*, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng cho trước. Việc chứng minh dựa trên một kết quả tương tự trong mặt phẳng.	– GV triển khai như trong SGK. – GV có thể yêu cầu HS trả lời câu hỏi a bằng cách nhắc lại kết quả đã biết trong Hình học phẳng. Từ đó suy ra sự tồn tại của đường thẳng qua M và song song với d. – GV gợi ý HS trả lời câu hỏi b: Gọi a là đường thẳng qua M và song song với d. Khi đó a thuộc mặt phẳng chứa d (vì a song song với d) và mặt phẳng này cũng chứa M (vì a đi qua M). Vì vậy mặt phẳng này trùng với mặt phẳng (P) và do đó a nằm trong (P).
Khung kiến thức	Qua một điểm không nằm trên một đường thẳng cho trước có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.	GV phát biểu như trong SGK. Có thể nhấn mạnh rằng tính chất này là sự mở rộng của tiên đề Euclid đã học trong mặt phẳng.
HĐ3	HS nhận biết được tính chất bắc cầu của quan hệ song song trong không gian thông qua quan sát thực tế.	– GV triển khai theo SGK. GV có thể thay thế "mép bảng" trong HĐ3 bằng một đường thẳng phù hợp khác. – GV cũng có thể yêu cầu HS nhắc lại tính chất bắc cầu của quan hệ song song trong mặt phẳng và nói rằng tính chất này vẫn đúng trong không gian.
Khung kiến thức	Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 3	HS sử dụng được tính chất bắc cầu của quan hệ song song trong việc giải một số bài tập tương đối đơn giản.	GV triển khai theo SGK. Trong Ví dụ 3, GV có thể yêu cầu HS nhắc lại dấu hiệu nhận biết hình bình hành và hỏi HS trong

		trường hợp này có thể chứng minh hai cặp cạnh nào của tứ giác *MPNQ* song song với nhau.
Luyện tập 3		HS tự thực hiện, GV gọi HS trình bày lời giải và nhận xét. *Gợi ý*: *CD* = *EF* (vì cùng bằng *AB*) và *CD* // *EF* (vì cùng song song với *AB*), do đó bốn điểm *C*, *D*, *E*, *F* đồng phẳng và *CDFE* là hình bình hành.
HĐ4	HS giải thích được định lí về ba đường giao tuyến: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đồng quy hoặc đôi một song song.	– GV triển khai theo SGK. *Gợi ý*: a) Vì *M* thuộc *a* nên *M* thuộc (*R*). Vì *M* thuộc *c* nên *M* thuộc (*Q*). Vì *M* thuộc (*Q*) và (*R*) nên *M* thuộc *b*. GV kết luận *a*, *b*, và *c* đồng quy. b) Nếu hai đường thẳng *b* và *c* cắt nhau thì theo câu a suy ra *a* và *c* cắt nhau. Điều này trái với giả sử ban đầu, suy ra *b* và *c* song song. Như vậy *a*, *b* và *c* đôi một song song với nhau. – GV rút ra kết luận sau khi HS trả lời được hai câu hỏi a và b. Chú ý rằng trong HĐ này, 3 đường thẳng *a*, *b* và *c* đôi một đồng phẳng nên chúng chỉ đôi một song song hoặc cắt nhau.
Khung kiến thức	Định lí ba đường giao tuyến.	GV phát biểu như trong SGK.
Chú ý	Hệ quả của định lí ba đường giao tuyến: Nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.	GV có thể sử dụng hình ảnh có sẵn (H.4.24) trong SGK để minh hoạ cho tính chất này. Đối với HS khá, giỏi, GV có thể yêu cầu các em thử chứng minh định lí này. (Áp dụng định lí ba đường giao tuyến của ba mặt phẳng (*P*), (*Q*) và (*R*).)

		Chú ý: Hệ quả trên được sử dụng thường xuyên trong các bài tập xác định giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
Ví dụ 4	HS sử dụng tính chất vừa học để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (chứa hai đường thẳng song song).	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 4		HS tự thực hiện. GV yêu cầu một hoặc hai HS trả lời và so sánh kết quả. *Đáp án*: Giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*) là đường thẳng qua *S* và song song với *AD*.
Vận dụng 2	HS vận dụng tính chất thừa nhận trong HĐ4 để giải thích một hiện tượng trong thực tế.	– GV có thể gợi ý cho HS bằng cách đặt câu hỏi: "Cần xét hai mặt phẳng nào để có thể áp dụng hệ quả của định lí về ba đường giao tuyến? Hai mặt phẳng nào có giao tuyến là *AB* (hoặc *CD*)?". – GV cũng có thể yêu cầu HS tìm ba mặt phẳng để áp dụng định lí về ba đường giao tuyến, tuy nhiên cách làm này khó hơn (vì cần tìm đến ba mặt phẳng so với hai mặt phẳng ở cách trước). *Gợi ý:* Xét mặt phẳng (*ABCD*) và mặt nước thì hai mặt phẳng này chứa hai đường thẳng song song là *CD* và cạnh đối diện với *CD* trên đáy bể. Do đó giao tuyến *AB* của hai mặt phẳng song song với *CD*.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	Nhắc lại tính chất của hai đường thẳng song song.	GV gọi HS trả lời. GV có thể giúp HS tóm tắt lại các kiến thức cần nhớ trên bảng.

Em có biết?	HS tìm hiểu hình ảnh liên quan đến vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian và các hình tạo được khi quay đường thẳng này quanh đường thẳng còn lại.	GV có thể yêu cầu HS quan sát các hình ảnh trong SGK, đồng thời minh hoạ việc quay các đường thẳng quanh một đường thẳng cho trước trong không gian bằng các dụng cụ hỗ trợ phù hợp. Nếu thời gian cho phép, GV có thể cùng HS tạo các mặt hypebol theo hướng dẫn.
Bài tập 4.9	HS nhận biết được các vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.	GV có thể gọi bốn HS nhận xét về tính đúng sai của mỗi mệnh đề. Với các mệnh đề sai GV có thể yêu cầu HS đưa ra một phản ví dụ.
Bài tập 4.10	HS xác định được cặp đường thẳng cắt nhau, song song, chéo nhau.	GV gọi một số HS trả lời và nhận xét.
Bài tập 4.12	HS sử dụng tính chất của hai đường thẳng song song để chứng minh một tứ giác là hình thang.	GV có thể hướng dẫn HS tự thực hiện theo cách tương tự như trong Ví dụ 3/ Luyện tập 3.

3. Phân loại bài tập

- Bài tập về vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian: Bài 4.9, 4.10.
- Bài tập sử dụng tính chất bắc cầu của quan hệ song song trong không gian: Bài 4.11, 4.12.
- Bài tập sử dụng tính chất: "Hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó": Bài 4.13, 4.14.
- Bài tập vận dụng: Bài 4.15.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

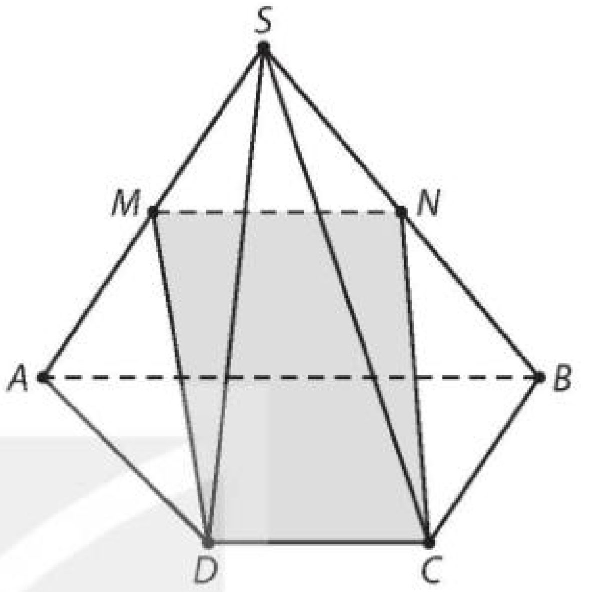
4.9. b).

4.10. Cặp đường thẳng song song là AB và CD, cặp đường thẳng cắt nhau là AC và BD, cặp đường thẳng chéo nhau là SB và CD.

4.11. Đoạn thẳng MN là đường trung bình của tam giác SAB nên MN song song với AB và $MN = \frac{1}{2}AB$. Đoạn thẳng PQ là đường trung bình của tam giác SCD nên PQ song song với CD và $PQ = \frac{1}{2}CD$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên AB song song với CD và $AB = CD$. Do đó MN song song với PQ và $MN = PQ$, suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.

4.12. (H.4.5). Đoạn thẳng MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \,//\, AB$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thang nên $AB \,//\, CD$. Vì vậy $MN \,//\, CD$ hay tứ giác $MNCD$ là hình thang.

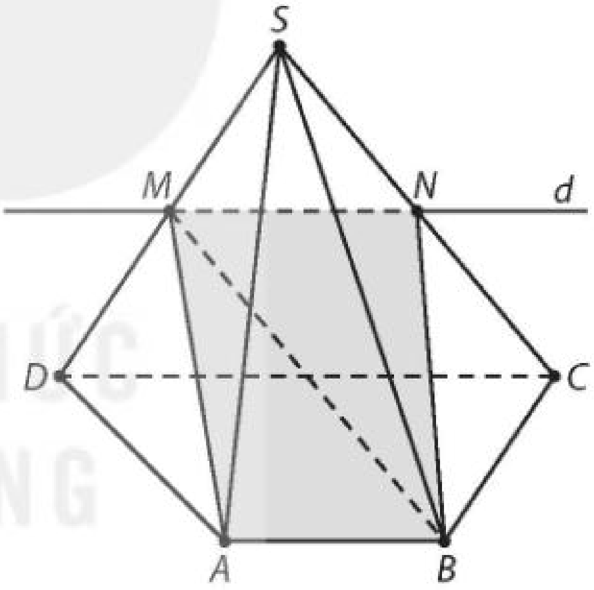


Hình 4.5

4.13. (H.4.6). a) Hai mặt phẳng (MAB) và (SCD) có điểm chung M và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB và CD nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua M và song song với AB, CD. Qua M vẽ đường thẳng d song song với CD (đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (SCD)) thì d là giao tuyến của hai mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b) Điểm N chính là giao điểm của đường thẳng d trong câu a và SC.

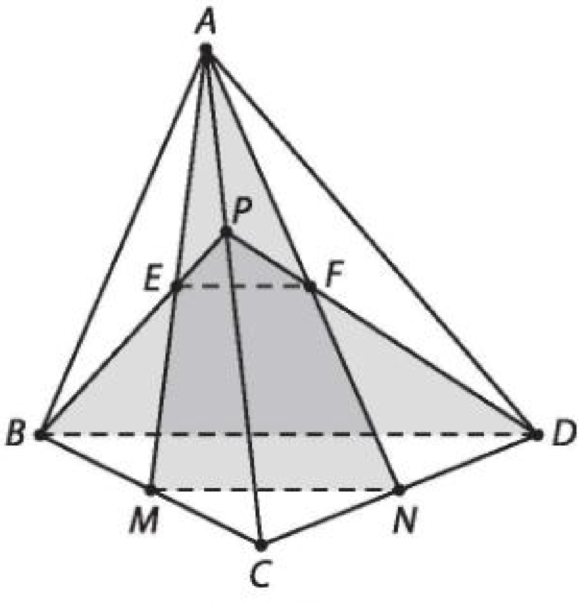
Vì M là trung điểm của cạnh SD và MN song song với CD nên MN là đường trung bình của tam giác SCD.



Hình 4.6

4.14. (H.4.7). a) Trong mặt phẳng (ABC) gọi E là giao điểm của AM và BP, trong mặt phẳng (ACD) gọi F là giao điểm của AN và DP. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) là đường thẳng EF.

b) Vì MN là đường trung bình của tam giác BCD nên MN song song với BD. Hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song với nhau là MN và BD nên giao tuyến của hai mặt phẳng này song song với BD.



Hình 4.7

4.15. • Xét trường hợp hai cánh cửa đều có dạng hình chữ nhật. Khi đó hai mép ngoài của cánh cửa luôn song song với bản lề của cửa (vì các cánh cửa có dạng hình chữ nhật), do đó hai mép ngoài của hai cánh cửa luôn song song với nhau.

• Xét trường hợp hai cánh cửa có dạng hình thang như trong đề bài. Giả sử có một vị trí của hai cánh cửa mà hai mép ngoài của chúng song song với nhau. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng cánh cửa thì d song song với hai mép cửa. Mặt khác d cũng song song với hai bản lề (vì hai mặt phẳng cánh cửa lần lượt "chứa" hai bản lề), suy ra hai mép cửa song song với bản lề. Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Do đó không có vị trí nào của hai cánh cửa để cho hai mép cửa song song với nhau.

Chú ý: Trong bài tập này còn trường hợp hai mặt phẳng cánh cửa không cắt nhau (hay song song với nhau), tuy nhiên khái niệm hai mặt phẳng song song sẽ chỉ được đề cập đến trong bài 13 và GV có thể yêu cầu HS đợi đến tiết học sau. (Trong trường hợp hai mặt phẳng cánh cửa song song, bằng cách sử dụng một tính chất của hai mặt phẳng song song, ta vẫn có thể lập luận để nhận được mâu thuẫn. Do đó, trong mọi trường hợp có thể khẳng định rằng không tồn tại vị trí của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau).

Bài 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Giải thích điều kiện để đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Giải thích tính chất cơ bản về đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến đường thẳng song song với mặt phẳng.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học), yêu nước (chẳng hạn thông qua việc tìm hiểu về cầu Long Biên, HS hiểu biết hơn về lịch sử của đất nước).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua việc thực hiện Vận dụng 1 và các tình huống tương tự).

- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Sau khi được học về vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường thẳng trong không gian, trong bài này HS tiếp tục được học về vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng. Có ba vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng, đó là đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng nằm trong mặt phẳng và đường thẳng song song với mặt phẳng. Trong ba trường hợp này, hai trường hợp đầu đã được đề cập trong Bài 10. Trong Bài 12, HS sẽ được giới thiệu thêm về trường hợp đường thẳng song song với mặt phẳng, từ đó các em sẽ có một cái nhìn trọn vẹn về vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

Chú ý rằng GV có thể giúp HS phân biệt các vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng dựa vào số giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

2. Trong bài học này, HS cần hiểu được hai kết quả chính liên quan đến đường thẳng song song với mặt phẳng. Kết quả thứ nhất là một dấu hiệu, hay một điều kiện cần và đủ, để một đường thẳng song song với một mặt phẳng. Kết quả này có thể được sử dụng để giải thích nhiều tình huống về đường thẳng song song với mặt phẳng trong thực tiễn. Kết quả thứ hai là một tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng và kết quả này thường được sử dụng trong các bài tập xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ở đó một trong hai mặt phẳng song song với một đường thẳng cho trước). HS nên biết vận dụng thành thạo cả hai kết quả này để giải các bài tập có nội dung tương ứng.

3. Có thể sử dụng tính chất về đường thẳng song song với mặt phẳng để suy ra tính chất "nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng, nếu có, song song với một trong hai đường thẳng, hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó" mà HS đã được học trong Bài 11. Do đó, trong các bài tập về xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ở đó một trong hai, hoặc cả hai mặt phẳng song song với một đường thẳng cho trước), HS có thể lập luận bằng cách sử dụng một trong hai tính chất trên.

4. GV khuyến khích HS tìm hiểu thêm các hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng trong không gian và vận dụng các kiến thức trong bài học để giải thích một số hiện tượng trong thực tiễn. Các tình huống như trong bài tập Vận dụng (mà ở đó sử dụng dấu hiệu nhận biết một đường thẳng song song với một mặt phẳng) là khá phổ biến trong cuộc sống.

5. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, hình ảnh liên quan đến các nội dung trong bài.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.

+ Tiết 1: Từ đầu đến hết Luyện tập 2.

+ Tiết 2: Từ Ví dụ 3 đến hết, Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giới thiệu sơ lược về hình ảnh của các đường thẳng song song với mặt phẳng, bước đầu giúp HS có cảm nhận về khái niệm đường thẳng song song với mặt phẳng.	GV trình bày hình ảnh như trong SGK. GV có thể lấy thêm các hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng trong thực tiễn.
1. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG		
HĐ1	HS quan sát và nhận biết được các vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.	GV có thể đưa ra trước các trường hợp: đường thẳng cắt mặt phẳng; đường thẳng nằm trong mặt phẳng; đường thẳng song song với mặt phẳng và yêu cầu HS kiểm tra xem trong các vị trí của xà ngang, cột dọc, thanh chống và thanh bên với mặt đất thì vị trí nào ứng với trường hợp nào. Trên thực tế, HS đã biết về trường hợp đường thẳng cắt mặt phẳng và đường thẳng nằm trong mặt phẳng, do đó GV có thể gợi ý để HS có thể tự mình phát hiện được trường hợp còn lại về đường thẳng song song với mặt phẳng.
Khung kiến thức	Các vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.	GV phát biểu như trong SGK.

?	HS nhận biết hình ảnh đường thẳng song song với mặt phẳng trong thực tiễn.	GV yêu cầu HS quan sát hình ảnh cầu Long Biên và xác định hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng.
Ví dụ 1	HS xác định được một đường thẳng cho trước cắt hay nằm trong mặt phẳng nào trong một tình huống cụ thể.	GV triển khai theo SGK. Chú ý rằng các bài tập trong mục 1 của bài này không yêu cầu HS xác định một đường thẳng cho trước song song với mặt phẳng nào, vì để làm được điều đó HS cần đến các tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng (được trình bày ở mục 2).
Luyện tập 1		HS tự thực hiện. GV gọi HS trả lời. *Đáp án*: Đường thẳng *AC* cắt mặt phẳng (*BCD*) và (*ABD*); đường thẳng *AC* nằm trong mặt phẳng (*ABC*) và (*ACD*).
2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG		
HĐ2	HS giải thích được điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng: Nếu một đường thẳng *a* không nằm trong mặt phẳng (*P*) và *a* song song với một đường thẳng nằm trong (*P*) thì *a* song song với (*P*).	– GV triển khai theo SGK. Chú ý rằng HĐ này hướng dẫn HS chứng minh *a* song song với (*P*) bằng phương pháp phản chứng: Khi giả sử *a* và (*P*) cắt nhau tại *M*, HS có thể suy ra *M* là điểm chung của *a* và *b*, điều này trái với điều kiện *a* song song với *b*. – GV có thể tìm cách diễn đạt khác nếu HS chưa thực sự quen thuộc với phương pháp phản chứng.
Khung kiến thức	Điều kiện để đường thẳng song song với mặt phẳng.	GV triển khai dựa theo SGK.
?	HS hiểu được sự cần thiết của điều kiện "đường thẳng *a* không nằm trong mặt phẳng (*P*)" trong tính chất vừa học.	– GV có thể chỉ ra một ví dụ mà ở đó nếu không có điều kiện này, tính chất trên không còn đúng. – Đối với một số HS khá, GV cũng có thể yêu cầu HS chỉ rõ điều kiện

		này được sử dụng như thế nào trong chứng minh ở HĐ2. (Cụ thể, nếu *a* nằm trong (*P*) thì (*P*) và (*Q*) trùng nhau và do đó không thể coi *b* là giao tuyến của (*P*) và (*Q*).)
Ví dụ 2	HS sử dụng tính chất học được qua HĐ2 để chứng minh một đường thẳng song song với một mặt phẳng.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2		GV gọi hai HS, mỗi HS trình bày một ý trong bài tập này. Sau đó GV nhận xét bài làm của HS.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	HS nhắc lại khái niệm đường thẳng song song với mặt phẳng và điều kiện (đủ) để một đường thẳng song song với mặt phẳng.	GV gọi HS trả lời.
Ví dụ 3	HS sử dụng điều kiện đường thẳng song song với mặt phẳng để chỉ ra sự tồn tại của một mặt phẳng song song với một đường thẳng cho trước.	GV triển khai theo SGK.
Chú ý	Tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường thẳng còn lại.	HS thừa nhận tính duy nhất của mặt phẳng chỉ ra trong Ví dụ 3. Trên thực tế tính chất này được nêu nhằm định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ở phần "Quan hệ vuông góc trong không gian".
Luyện tập 3	HS xác định được mặt phẳng song song với một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường thẳng còn lại trong một tình huống cụ thể.	HS tự thực hiện. GV gọi HS trả lời nhanh. *Đáp án*: *SD* và *AB* là hai đường thẳng chéo nhau; mặt phẳng cần tìm là (*SCD*).

Vận dụng	HS sử dụng điều kiện đường thẳng song song với mặt phẳng để trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.	Có thể coi dây nhợ trùng với cạnh nằm ngang của các viên gạch trên cùng một hàng gạch. Các cạnh này song song với nhau và song song với các cạnh nằm trên mặt đất của những viên gạch ở hàng thấp nhất (vì mỗi mặt của viên gạch là hình chữ nhật), do đó dây nhợ song song với mặt đất.
HĐ3	HS giải thích được tính chất: "Nếu mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì giao tuyến b của (P) và (Q) (nếu có) song song với a".	– GV triển khai theo SGK. – GV có thể gợi ý HS chứng minh hai đường thẳng (phân biệt) là song song bằng cách chỉ ra rằng hai đường thẳng đó không chéo nhau và cũng không cắt nhau. – GV gợi ý HS trả lời câu hỏi a: Hai đường thẳng a và b có cùng thuộc mặt phẳng nào hay không? – GV gợi ý HS trả lời câu hỏi b: Nếu hai đường thẳng a và b cắt nhau thì giao điểm của chúng thuộc mặt phẳng nào? – GV gợi ý HS giải thích tại sao hai đường thẳng a và b phân biệt: Chỉ ra một mặt phẳng chứa b mà không chứa a.
Khung kiến thức	Nếu mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì giao tuyến b của (P) và (Q) (nếu có) song song với a.	GV phát biểu như trong SGK. GV nhấn mạnh đây là một tính chất quan trọng để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (khi một trong hai mặt phẳng chứa đường thẳng song song với mặt phẳng còn lại).
Ví dụ 4	HS sử dụng kiến thức nhận được trong HĐ3 để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.	GV triển khai dựa theo SGK.
Luyện tập 4		HS tự thực hiện. Chú ý rằng trong ví dụ này mặt phẳng (Q) *song song* với mặt phẳng (ABD) nên chúng không có giao tuyến. Khái niệm hai mặt phẳng song song và các tính chất liên quan sẽ được đề cập trong Bài 13.

		Gợi ý: Qua *E* vẽ đường thẳng song song với *AD*, đường thẳng này cắt *CD* tại *I*. Các giao tuyến của (*Q*) và các mặt của tứ diện là *EF*, *EI* và *IF*.
Bài tập 4.16	HS nhận biết được vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.	GV gọi HS trả lời.
Bài tập 4.20	HS biết sử dụng điều kiện đường thẳng song song với mặt phẳng trong thực tiễn.	– GV có thể gợi ý HS bằng cách đặt câu hỏi: "Mép trên của cửa luôn song song với đường thẳng nào?". – GV có thể khai thác thêm tình huống đã cho bằng cách đặt câu hỏi tương tự cho mép ngoài của cánh cửa.

3. Phân loại bài tập

- Bài tập về vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng: Bài 4.16, 4.17.
- Bài tập về dấu hiệu nhận biết đường thẳng song song với mặt phẳng: Bài 4.17, 4.18.
- Bài tập vận dụng tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng: Bài 4.19.
- Bài tập vận dụng: Bài 4.20.

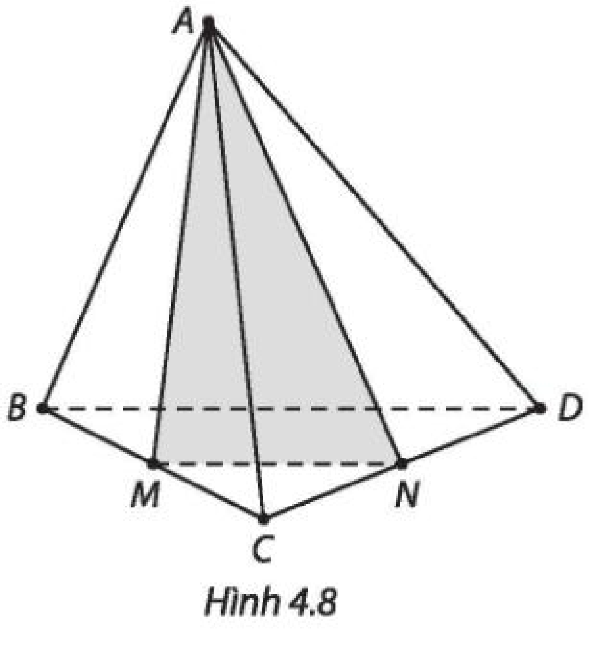
IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

4.16. a)

4.17. a) Đường thẳng *AM* và mặt phẳng (*BCD*) có điểm chung *C* nên đường thẳng *AM* không song song với mặt phẳng (*BCD*).

b) Vì *MN* là đường trung bình của tam giác *ACD* nên *MN* // *CD*. Vì đường thẳng *MN* không nằm trong mặt phẳng (*BCD*) nên *MN* // (*BCD*).

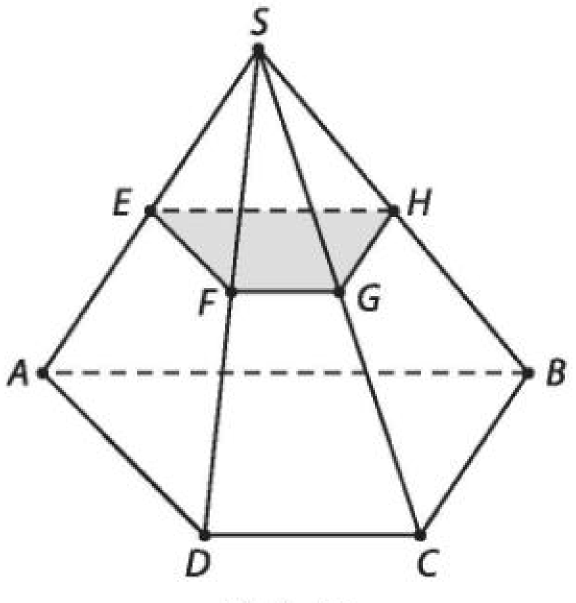
4.18. (H.4.8). Đoạn thẳng *MN* là đường trung bình của tam giác *BCD* nên *MN* song song với *BD*. Đường thẳng *BD* không nằm trong mặt phẳng (*AMN*) nên *BD* song song với (*AMN*).



Hình 4.8

4.19. (H.4.9). Vì mặt phẳng (*SAD*) chứa đường thẳng *AD* song song với mặt phẳng (*P*) nên mặt phẳng (*SAD*) cắt mặt phẳng (*P*) theo giao tuyến song song với *AD*. Vẽ *EF* // *AD* (*F* thuộc *SD*) thì *EF* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*) và (*SAD*).

Lập luận tương tự, vẽ *FG* // *CD* (*G* thuộc *SC*) và *EH* // *AB* (*H* thuộc *SB*) thì *FG* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*) và (*SCD*), *EH* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*) và (*SAB*). Ta cũng có *GH* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*) và (*SBC*).



Hình 4.9

Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (*P*) và các mặt bên của hình chóp là tứ giác *EFGH*.

Vì *FG* // *CD*, *EH* // *AB* và *AB* // *CD* nên *FG* // *EH*, suy ra tứ giác *EFGH* là hình thang.

4.20. Mép trên của cửa ra vào luôn song song với mép dưới của cửa (vì cánh cửa là hình chữ nhật). Vì mép dưới của cửa "nằm trong" mặt phẳng nền nhà nên mép trên của cửa luôn song song với mặt phẳng đó.

Bài 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết hai mặt phẳng song song trong không gian.
- Giải thích điều kiện để hai mặt phẳng song song: Nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.
- Giải thích tính chất của hai mặt phẳng song song: Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì mặt phẳng đó cũng cắt mặt phẳng còn lại, đồng thời hai giao tuyến song song với nhau.
- Giải thích định lí Thalès trong không gian: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
- Giải thích tính chất cơ bản của hình lăng trụ và hình hộp: Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành, các cạnh bên đôi một song song và có độ dài bằng nhau; hình hộp có các mặt là hình bình hành.

- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến hai mặt phẳng song song trong không gian.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học), yêu nước (chẳng hạn thông qua việc tìm hiểu ruộng bậc thang, một hình thức canh tác độc đáo thường có ở khu vực Tây Bắc của Việt Nam, các em hiểu hơn về đất nước ta, có cảm hứng học tập góp phần xây dựng Tổ quốc).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua việc thực hiện Vận dụng 1 về dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song và Vận dụng 2 về áp dụng định lí Thalès trong không gian).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Trong không gian cho hai mặt phẳng, khi đó có ba vị trí tương đối giữa chúng, đó là: hai mặt phẳng có thể trùng nhau, có thể cắt nhau hoặc có thể song song với nhau. Hai trường hợp đầu xảy ra khi hai mặt phẳng có điểm chung: trường hợp đầu tiên xảy ra khi hai mặt phẳng có ba điểm chung không thẳng hàng, trong khi ở trường hợp thứ hai tập hợp các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng (xem bài 10). Bài học này tập trung vào trường hợp thứ ba, ở đó hai mặt phẳng không có điểm chung, hay hai mặt phẳng song song. Do đó trước khi vào bài học này, GV có thể yêu cầu HS nhắc lại hai trường hợp đầu tiên về vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, từ đó dẫn dắt HS đến trường hợp thứ ba. GV cũng có thể giúp HS hệ thống lại ba trường hợp về vị trí tương đối của hai mặt phẳng ở cuối bài học.

2. Một trong những yêu cầu quan trọng của bài học này là HS giải thích được dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song: Hai mặt phẳng song song với nhau nếu một trong hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng còn lại. Khi giải thích dấu hiệu này HS cần nắm được tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng. Hơn nữa, để sử dụng dấu hiệu này trong các bài tập chứng minh hai mặt phẳng song song, HS cần biết cách chứng minh một đường thẳng song song với mặt phẳng bằng cách chỉ ra đường thẳng đó song song với một đường thẳng khác nằm trong mặt phẳng đã cho (xem Bài 12). Ví dụ 1 và Luyện tập 1 minh hoạ cho các bài tập như vậy.

3. Tính chất "Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó" trong khung kiến thức sau HĐ3 có thể coi như một dạng mở rộng của tiên đề Euclid trong mặt phẳng lên trường hợp ba chiều. Chú ý rằng nếu tiên đề Euclid trong mặt phẳng cần được thừa nhận như một tính chất cơ sở để suy ra các kết quả khác trong Hình học phẳng thì tính chất nêu trên có thể được chứng minh một cách chặt chẽ bằng cách áp dụng tiên đề Euclid trong mặt phẳng. Mặc dù vậy, ta không trình bày chứng minh của tính chất trên mà chỉ đưa ra hoạt động để HS thừa nhận tính chất đó. Từ tính chất này có thể suy ra tính chất "bắc cầu" của quan hệ song song giữa các mặt phẳng, đồng thời áp dụng vào việc chứng minh một số điểm cho trước là đồng phẳng (xem Ví dụ 2 và Luyện tập 2).

4. Định lí Thalès trong không gian là sự tổng quát hoá của định lí Thalès trong mặt phẳng. (Trong chứng minh của định lí Thalès trong không gian có sử dụng định lí Thalès trong mặt phẳng). Trong quá trình giảng dạy, GV có thể hỏi HS làm thế nào để nhận lại định lí Thalès trong mặt phẳng từ định lí Thalès trong không gian. Nếu thời gian cho phép, GV cũng có thể giới thiệu với HS về dạng đảo của định lí Thalès trong không gian. Chú ý rằng định lí Thalès trong không gian cho phép tính tỉ lệ độ dài các đoạn thẳng (tạo bởi một đường thẳng cắt các mặt phẳng song song), do đó để áp dụng định lí Thalès trong không gian khi làm bài tập, HS cần xác định được ba mặt phẳng đôi một song song và hai cát tuyến phù hợp.

5. Dựa trên việc đã được làm quen với hình lăng trụ (đứng) tam giác/ tứ giác trong phần Hình học trực quan ở lớp 7, cùng với đó là các kiến thức của Hình học không gian (đường thẳng song song, mặt phẳng song song), HS có đủ cơ sở để đưa ra định nghĩa của hình lăng trụ một cách chính xác về mặt toán học. Trên thực tế HS đã được biết các thuật ngữ như mặt đáy, mặt bên, cạnh bên... của hình lăng trụ, vì vậy việc giới thiệu lại các khái niệm này (trong trường hợp tổng quát) sẽ không gây khó khăn cho HS.

Một trong các tính chất có thể nhận thấy của hình lăng trụ là hai đáy là hai đa giác bằng nhau. Tuy nhiên, khái niệm hai hình bằng nhau trong không gian (cũng như góc trong không gian) chưa được định nghĩa, vì vậy GV chỉ nên đưa ra tính chất trên dưới dạng trực quan, tức là có thể yêu cầu HS quan sát và thừa nhận.

6. GV nên khuyến khích HS tìm hiểu thêm về hình ảnh của các mặt phẳng song song trong thực tiễn và vận dụng các kết quả, tính chất được đề cập tới trong bài học để kiểm tra tính song song của các mặt phẳng đó.

7. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, học liệu liên quan đến các nội dung trong bài (ví dụ như hình ảnh ruộng bậc thang, hình ảnh tháp nghiêng Pisa ở Ý, một cốc nước hoặc bình nước và một cây thước thẳng).

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết lí thuyết + 1 tiết bài tập.

+ Tiết 1: Từ đầu đến hết Vận dụng 1.
+ Tiết 2: Từ HĐ3 đến hết HĐ5.
+ Tiết 3: Từ Ví dụ 4 đến hết.
+ Tiết 4: Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giới thiệu sơ lược về các mặt phẳng cắt (hay mặt phẳng tạo bởi mặt dao) khi cắt thức ăn. HS trao đổi, thảo luận về vị trí tương đối của các mặt phẳng cắt nếu muốn thức ăn được cắt đều và đẹp.	– Có thể sử dụng hình ảnh mở đầu trong SGK hoặc đưa ra các hình ảnh tương tự. GV có thể thực hiện việc cắt một số nguyên liệu như rau, củ, bánh mì... trực tiếp trên lớp để HS quan sát. (GV cũng có thể thực hiện tại nhà và quay lại video). – GV cần đảm bảo rằng HS hình dung được mặt phẳng cắt (mặt phẳng tạo được khi thực hiện nhát cắt).
1. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG		
HĐ1	HS quan sát được hình ảnh về hai mặt phẳng không có điểm chung, từ đó có cơ sở để đưa ra một số hình ảnh tương tự. Sau HĐ này GV sẽ phát biểu định nghĩa về hai mặt phẳng song song.	GV yêu cầu HS quan sát Hình 4.40 và giải thích rằng các mặt bậc thang (khi được mở rộng vô hạn) có "xu hướng" không cắt nhau. Chú ý rằng nhận định này chỉ mang tính trực giác để giúp HS có cảm nhận về hai mặt phẳng song song. Dựa trên cảm nhận đó, HS có thể đưa ra thêm các ví dụ về hai mặt phẳng song song trong thực tiễn. Các hình ảnh phổ biến có thể

		được tìm thấy trong lớp học bao gồm sàn nhà và trần nhà, hai mặt tường đối diện, mặt bàn và mặt ghế nằm ngang...
Khung kiến thức	Định nghĩa hai mặt phẳng song song.	GV triển khai như SGK.
Nhận xét	HS hiểu rằng nếu một đường thẳng nằm trong một trong hai mặt phẳng song song thì đường thẳng đó song song với mặt phẳng còn lại.	Tính chất này được suy ra trực tiếp từ định nghĩa về hai mặt phẳng song song và định nghĩa về đường thẳng song song với mặt phẳng. GV có thể gợi ý HS quan sát hình ảnh trong khung kiến thức và đặt câu hỏi gợi ý, ví dụ như: "Nếu đường thẳng *d* nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng *d* và mặt phẳng (β) có điểm chung hay không?". Từ đó HS có thể tự đưa ra kết luận.
?	HS nhận ra rằng các "nhát cắt" cần song song với nhau.	Trước khi yêu cầu HS trả lời câu hỏi ở tình huống mở đầu, GV có thể bình luận thêm về hai hình ảnh được đưa ra trong SGK: ruộng bậc thang có các mặt bậc thang song song với nhau, trong khi tháp nghiêng Pisa có các mặt sàn ở mỗi tầng không song song với mặt đất. Sự đối lập giữa hai hình ảnh này cho ta thấy vai trò của quan hệ song song trong cuộc sống: tính song song của hai mặt phẳng tạo sự cân bằng, đối xứng và ổn định. Nhận xét này phần nào sẽ giúp HS trả lời câu hỏi ở tình huống mở đầu.
2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG		
HĐ2	HS giải thích được điều kiện (hay dấu hiệu) để hai	GV triển khai theo SGK. Chú ý rằng để trả lời câu hỏi trong HĐ2, HS cần

	mặt phẳng song song với nhau.	sử dụng tính chất "Nếu mặt phẳng (α) chứa đường thẳng *a* song song với mặt phẳng (β) thì hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến *c* song song với *a*" đã học trong Bài 12. HS lập luận tương tự để suy ra *c* song song với *b*, điều này dẫn tới vô lí vì hai đường thẳng *a* và *b* cắt nhau.
Khung kiến thức	Điều kiện, hay dấu hiệu nhận biết, của hai mặt phẳng song song.	GV phát biểu theo SGK.
?	HS hiểu được sự cần thiết của điều kiện "hai đường thẳng cắt nhau" trong tính chất vừa nêu ở khung kiến thức.	GV có thể chỉ ra phản ví dụ nếu không có điều kiện này. Trong chứng minh trên ta cũng thấy điều kiện này được sử dụng để dẫn tới vô lí: khi có *a* và *b* cùng song song với *c* thì suy ra *a* và *b song song* với nhau.
Ví dụ 1	HS chứng minh được hai mặt phẳng song song dựa vào kiến thức vừa học trong HĐ2.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1		GV yêu cầu HS vẽ hình và tự thực hiện. *Gợi ý*: Vì $m \parallel BC$ và m không thuộc mặt phẳng (BCD) nên $m \parallel (BCD)$. Tương tự $n \parallel (BCD)$. Mặt phẳng $\mathrm{mp}(m, n)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau m và n cùng song song với mặt phẳng (BCD) nên $\mathrm{mp}(m, n) \parallel (BCD)$.
Vận dụng 1	HS sử dụng dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song để giải thích một hiện tượng trong thực tiễn.	GV có thể gợi ý cho HS bằng cách đặt các câu hỏi như: "Mặt phẳng tạo bởi mặt bàn được xác định bởi hai đường thẳng nào?", "Các đường thẳng đó có song song với mặt đất hay không?". Từ đó HS sử dụng dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song để đưa ra câu trả lời. *Gợi ý*: "Mặt phẳng" mặt bàn được tạo bởi hai "đường thẳng" là hai cạnh của

		khung sắt. Vì mỗi khung sắt có dạng hình chữ nhật nên hai "đường thẳng" tạo nên mặt bàn đều song song với mặt đất, suy ra mặt bàn song song với mặt đất.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	HS nhắc lại định nghĩa và điều kiện hai mặt phẳng song song.	GV gọi HS trả lời.
HĐ3	HS thử nghiệm và thừa nhận tính chất: Qua một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P) cho trước có đúng một mặt phẳng song song với (P).	– GV triển khai như trong SGK. GV có thể thay thế mặt bàn nằm ngang, mặt đất bằng các mặt phẳng cố định khác, miễn là hai mặt phẳng đủ gần nhau để HS có thể dễ dàng quan sát. Sau khi HS lựa chọn các vị trí khác nhau của tấm bìa (sao cho mặt bìa song song với mặt đất), HS sẽ thấy mặt bìa luôn trùng với mặt bàn. Từ đó GV phát biểu tính chất thừa nhận như trong khung kiến thức. – Chú ý rằng trong tính chất thừa nhận trên, sự tồn tại của mặt phẳng (α) qua A và song song với (P) có thể chứng minh dễ dàng (qua A vẽ hai đường thẳng m, n song song với (P) và đặt $(\alpha) = (m, n)$), tuy nhiên tính duy nhất của (α) lại quan trọng hơn vì từ đó có thể suy ra tính chất bắc cầu của quan hệ song song hoặc chứng minh các điểm đồng phẳng... Tính duy nhất của (α) có thể chứng minh như sau: Giả sử qua A còn có mặt phẳng (β) song song với (P). Gọi (Q) là mặt phẳng bất kì qua A cắt ba mặt phẳng (α), (β), (P) lần

		lượt theo giao tuyến *a*, *b*, *c*. Khi đó *a*, *b* cùng song song với *c*, đồng thời *a*, *b* cùng đi qua *A*, điều này là vô lí.
Khung kiến thức	Qua một điểm *A* nằm ngoài mặt phẳng (*P*) cho trước có đúng một mặt phẳng song song với (*P*).	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 2	HS sử dụng được tính duy nhất của mặt phẳng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng cho trước để chứng minh bốn điểm đồng phẳng.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2		HS tự thực hiện theo cách tương tự như trong Ví dụ 2.
HĐ4	HS giải thích được tính chất của hai mặt phẳng song song: Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì mặt phẳng đó cũng cắt mặt phẳng còn lại, đồng thời hai giao tuyến song song với nhau.	– GV triển khai theo SGK. – Để trả lời câu a, HS sử dụng tính chất "bắc cầu" của quan hệ song song giữa hai mặt phẳng: Nếu (*R*) song song với (*Q*) thì do (*P*) song song với (*Q*) nên (*R*) và (*P*) song song với nhau, điều này là vô lí. (Chú ý rằng từ giả thiết suy ra ba mặt phẳng (*P*), (*Q*), (*R*) là đôi một phân biệt). Với câu b, HS có thể thấy *a* và *b* cùng thuộc (*R*) nên *a* và *b* không chéo nhau. Hơn nữa nếu *a* và *b* cắt nhau thì chứng tỏ (*P*) và (*Q*) có điểm chung, điều này trái với điều kiện (*P*) và (*Q*) song song. Vì vậy *a* và *b* song song.
Khung kiến thức	Tính chất của hai mặt phẳng song song.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 3	HS sử dụng tính chất vừa nêu để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.	GV triển khai theo SGK. Chú ý rằng trong Ví dụ 2, HS đã chứng minh được rằng hai mặt phẳng (*MNPQ*) và (*ABCD*) song song.

Luyện tập 3		HS tự thực hiện. *Gợi ý*: Trong mặt phẳng (EMQ), qua E vẽ đường thẳng song song với MQ cắt cạnh CD tại H thì EH là giao tuyến của hai mặt phẳng (EMQ) và ($ABCD$).
3. ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG KHÔNG GIAN		
HĐ5	HS giải thích được định lí Thalès trong không gian: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.	*Gợi ý:* a) Vì BD và CC' lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (ACC') với hai mặt phẳng song song (Q) và (R). Do đó theo tính chất của hai mặt phẳng song song suy ra $BD \parallel CC'$. Tương tự, $B'D \parallel AA'$. b) Áp dụng định lí Thalès trong các mặt phẳng (ACC') và ($AA'C'$) để suy ra các tỉ số bằng nhau.
Khung kiến thức	Định lí Thalès trong không gian.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 4	HS sử dụng định lí Thalès trong không gian để tính (tỉ lệ) độ dài các đoạn thẳng.	GV triển khai theo SGK. Chú ý rằng để áp dụng được định lí Thalès trong không gian HS cần xác định được ba mặt phẳng đôi một song song và hai cát tuyến phù hợp.
Luyện tập 4		HS tự thực hiện. *Đáp án*: 6 cm.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	HS nhắc lại tính chất của hai mặt phẳng song song và định lí Thalès.	GV gọi HS trả lời.
4. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP		
HĐ6	HS mô tả được hình lăng trụ chính xác về mặt toán học.	Ở lớp 7, HS đã được làm quen với hình lăng trụ (đứng) tam giác, tứ giác và biết được các khái niệm mặt bên, cạnh bên,

		đỉnh, mặt đáy của hình lăng trụ tam giác. Dựa trên cơ sở đó, GV yêu cầu HS quan sát hình ảnh trong SGK và xác định những đặc điểm giống nhau của các hình, từ đó đưa ra định nghĩa tổng quát của hình lăng trụ. HS cần nhận ra hai đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song và các cạnh bên của hình lăng trụ song song.
Khung kiến thức	Định nghĩa hình lăng trụ và các thuật ngữ liên quan.	GV trình bày như trong SGK.
?	HS giải thích được một số tính chất của hình lăng trụ.	GV gợi ý HS sử dụng tính chất một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song để suy ra các cặp cạnh tương ứng ở hai đáy của hình lăng trụ là song song, từ đó suy ra các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.
Chú ý	HS nhận biết được cách gọi tên hình lăng trụ.	GV trình bày như trong SGK.
Ví dụ 5	HS biết cách chứng minh một hình là hình lăng trụ.	GV triển khai theo SGK. GV hướng dẫn HS cách chứng minh một hình là hình lăng trụ: Chứng minh hai mặt đáy song song và các cạnh bên đôi một song song.
Luyện tập 5		HS tự thực hiện. GV yêu cầu một HS trình bày lời giải trên bảng. *Gợi ý*: Vì M và M' là trung điểm hai cạnh BC và $B'C'$ của hình bình hành $BCC'B'$ nên $MM' \parallel CC'$, suy ra MM', CC' và AA' đôi một song song. Vì hai mặt phẳng (AMC) và $(A'M'C')$ song song nên $AMC.A'M'C'$ là hình lăng trụ.
HĐ7	HS quan sát và nhận biết được hình hộp là một hình lăng trụ đặc biệt.	GV triển khai theo SGK.
Khung kiến thức	Định nghĩa hình hộp và các thuật ngữ liên quan.	GV triển khai theo SGK.

Ví dụ 6	HS sử dụng định nghĩa của hình hộp để giải thích được một tính chất của hình hộp.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 6		GV yêu cầu cả lớp cùng làm Luyện tập 6. *Gợi ý:* Mặt đáy $ABCD$ là hình bình hành nên AD // BC, suy ra AD // $(BCC'B')$. Các cạnh bên của hình hộp đôi một song song nên DD' // CC', suy ra DD' // $(BCC'B')$. Mặt phẳng $(ADD'A')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau AD và DD' cùng song song với mặt phẳng $(BCC'B')$ nên $(ADD'A')$ // $(BCC'B')$.
Nhận xét	HS rút ra kết luận về hai tính chất của hình hộp.	GV triển khai theo SGK.
Vận dụng 2	HS vận dụng được định lí Thalès trong không gian để tính độ dài của đoạn thẳng trong một tình huống thực tế.	GV gợi ý HS cách sử dụng định lí Thalès để giải thích tình huống này. Có thể hỏi HS rằng từ các tỉ lệ cần chứng minh là bằng nhau thì ta nên áp dụng định lí Thalès cho các mặt phẳng song song nào và các cát tuyến nào. *Gợi ý*: Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng là mặt đáy của bể, mặt nước và mặt nắp bể, hai "cát tuyến" là một cạnh thẳng đứng bất kì của bể và thanh gỗ. Từ đó theo định lí Thalès và tính chất của tỉ lệ thức suy ra hai tỉ lệ được đề cập là bằng nhau. *Chú ý:* GV có thể kí hiệu các điểm A, B, C, A', B', C' lên Hình 4.53 như trong phát biểu của định lí Thalès để giúp HS hình dung tình huống dễ hơn.

Tiết 4

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	HS nhắc lại các nội dung kiến thức được học trong bài.	GV giúp HS tóm tắt lại kiến thức của cả bài và nhấn mạnh vào các nội dung quan trọng.

Bài tập 4.21	HS nhận biết được điều kiện để hai mặt phẳng song song.	GV gọi HS trả lời nhanh.
Bài tập 4.22	HS chứng minh được hai mặt phẳng song song với nhau.	GV nhắc lại cách chứng minh hai mặt phẳng song song và yêu cầu HS trình bày lời giải trên bảng.
Bài tập 4.23		
Bài tập 4.24	HS biết sử dụng định lí Thalès để suy ra tỉ lệ độ dài các đoạn thẳng.	HS có thể tự thực hiện ở nhà.
Bài tập 4.25	HS biết cách chứng minh một hình là hình lăng trụ hoặc hình hộp.	GV gợi ý HS sử dụng tính chất mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song.
Bài tập 4.26		
Bài tập 4.27		
Bài tập 4.28	HS sử dụng tính chất của hai mặt phẳng song song để giải thích một hiện tượng thực tế.	GV gợi ý HS sử dụng tính chất mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song.

3. Phân loại bài tập

- Bài tập chứng minh (hoặc xác định) hai mặt phẳng song song: Bài 4.21, 4.22, 4.23.
- Bài tập sử dụng định lí Thalès: Bài 4.24.
- Bài tập về tính chất của hai mặt phẳng song song, hình lăng trụ, hình hộp: Bài 4.25, 4.26, 4.27.
- Bài tập vận dụng: Bài 4.28.

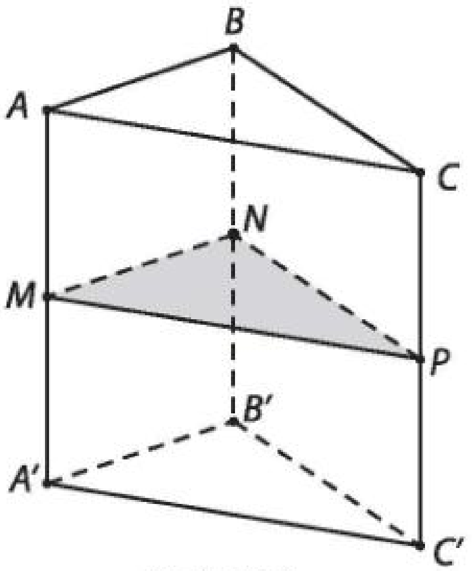
IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

4.21. c).

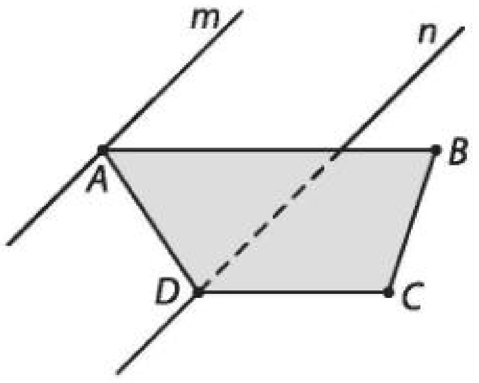
4.22. (H.4.10). Vì M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA' và BB' của hình bình hành $ABB'A'$ nên MN // AB, suy ra MN // (ABC).

Tương tự có NP // (ABC).

Mặt phẳng (MNP) có hai đường thẳng cắt nhau MN và NP cùng song song với mặt phẳng (ABC) nên mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ABC).

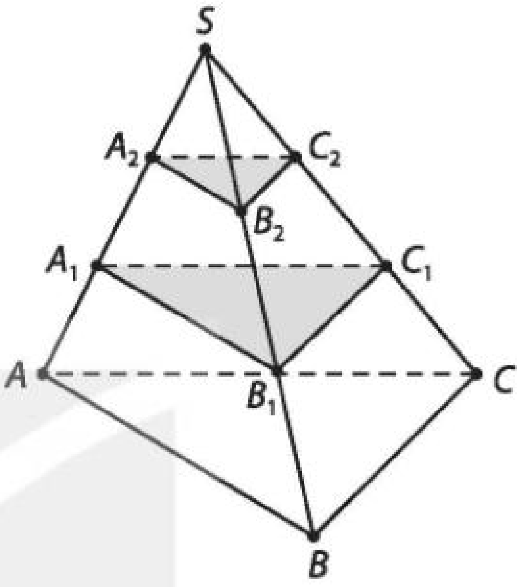


Hình 4.10



Hình 4.11

4.23. (H.4.11). Vì $AB \parallel CD$ và CD nằm trong (C, n) nên $AB \parallel (C, n)$. Vì $m \parallel n$ và n nằm trong (C, n) nên $m \parallel (C, n)$. Mặt phẳng (B, m) chứa hai đường thẳng cắt nhau là AB và m, đồng thời hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (C, n), do đó hai mặt phẳng (B, m) và (C, n) song song.

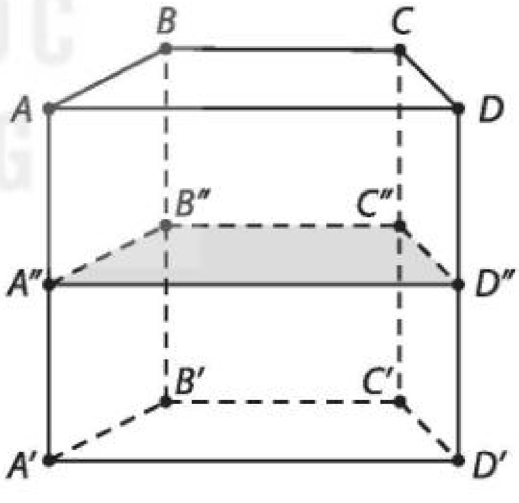


Hình 4.12

4.24. (H.4.12). Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng đôi một song song là (P), (Q), (ABC) và hai cát tuyến SA, SB suy ra $\dfrac{AA_1}{A_1A_2} = \dfrac{BB_1}{B_1B_2}$ và do đó $BB_1 = B_1B_2$. Gọi (R) là mặt phẳng qua S và song song với mặt phẳng (P). Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng đôi một song song là (R), (P), (Q) và hai cát tuyến SA, SB suy ra $\dfrac{A_1A_2}{A_2S} = \dfrac{B_1B_2}{B_2S}$ và do đó $B_1B_2 = B_2S$. Vậy $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$.

Chứng minh tương tự có $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$.

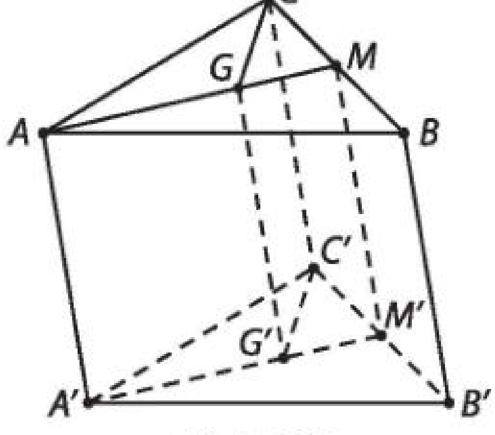
Chú ý: Có thể sử dụng tính chất một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song theo hai giao tuyến song song để suy ra AB, A_1B_1, A_2B_2 đôi một song song. Từ đó sử dụng định lí Thalès trong mặt phẳng (SAB) để nhận được $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$.



Hình 4.13

4.25. (H.4.13). Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ nên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song. Vì mặt phẳng $(A''B''C''D'')$ song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên mặt phẳng $(A''B''C''D'')$ song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì các cạnh bên của hình lăng trụ song song với nhau nên AA'', BB'', CC'', DD'' đôi một song song. Vậy $ABCD.A''B''C''D''$ là hình lăng trụ.



Hình 4.14

4.26. (H.4.14). a) Gọi M, M' lần lượt là giao điểm của AG, $A'G'$ với BC, $B'C'$ thì M, M' lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$. Vì $BCC'B'$ là hình bình hành nên MM' song song và bằng CC', suy ra MM' song song và bằng AA'. Vậy tứ giác $AMM'A'$ là hình bình hành, suy ra $AM = A'M'$ và $AM \parallel A'M'$.

Vì G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ nên

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}A'M' = A'G'.$$

Tứ giác $AGG'A'$ có $AG = A'G'$ và $AG \parallel A'G'$ nên tứ giác này là hình bình hành.

b) Vì tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành nên GG' song song với AA' và do đó cũng song song với CC'.

Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ song song, do đó hai mặt phẳng (AGC) và $(A'G'C')$ song song.

Vậy $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ.

4.27. Mặt phẳng $(ADD'A')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(MNN'M')$ lần lượt theo hai giao tuyến AA' và MM' nên AA' và MM' song song. Tương tự BB' và NN' song song. Lại do $(ABNM)$ và $(A'B'N'M')$ song song nên suy ra $ABNM.A'B'N'M'$ là hình lăng trụ.

Mặt phẳng $(ABCD)$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(MNN'M')$ lần lượt theo hai giao tuyến AB và MN nên AB và MN song song. Lại có AM song song với BN (vì $ABCD$ là hình bình hành) nên tứ giác $ABNM$ là hình bình hành. Tương tự tứ giác $A'B'N'M'$ là hình bình hành.

Hình lăng trụ $ABNM.A'B'N'M'$ có hai đáy là hình bình hành nên nó là hình hộp.

4.28. Xét hai mặt phẳng song song là hai mặt bậc thang và mặt phẳng thứ ba là mặt tường. Khi đó, hai mép bậc thang trên tường là hai giao tuyến của mặt tường với hai mặt bậc thang, vì vậy chúng song song với nhau.

Bài 14. PHÉP CHIẾU SONG SONG (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết khái niệm và tính chất cơ bản của phép chiếu song song.
- Xác định ảnh của một điểm, một đoạn thẳng, một tam giác, một đường tròn qua phép chiếu song song.
- Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản.
- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến phép chiếu song song.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt bài học), yêu nước (chẳng hạn thông qua hình ảnh phố cổ Hội An ở Đà Nẵng, HS được vun đắp tình yêu quê hương đất nước).
- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (thông qua Vận dụng 1 về xác định hình chiếu của một vật thể qua phép chiếu song song, thông qua Vận dụng 2 về việc sử dụng phép chiếu song song để vẽ chữ nổi).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (xuyên suốt bài học).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Sau khi đã học về quan hệ song song giữa đường thẳng và đường thẳng, đường thẳng và mặt phẳng, mặt phẳng và mặt phẳng, trong bài học này HS tiếp tục được giới thiệu về phép chiếu song song. Đây là một khái niệm quan trọng để giúp HS hiểu được hình biểu diễn của các hình trong không gian, từ đó tạo cơ sở toán học để HS hiểu nội dung Vẽ kĩ thuật trong môn Công nghệ. Phép chiếu vuông góc, một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song, sẽ được giới thiệu với HS trong học kì 2.

Các ví dụ thường thấy trong thực tiễn liên quan đến phép chiếu song song thường liên quan đến bóng của vật thể dưới ánh mặt trời. Chú ý rằng bóng của vật thể dưới ánh đèn (hay ánh sáng phát ra từ một nguồn sáng gần vật thể) không phải là hình chiếu của vật thể qua phép chiếu song song, đó là hình chiếu của vật thể qua phép chiếu xuyên tâm. (Xem phần Em có biết).

2. Các tính chất của phép chiếu song song như bảo toàn tính thẳng hàng của các điểm, bảo toàn tính song song của các đường thẳng hay bảo toàn tỉ số độ dài các đoạn thẳng nằm trên cùng một đường thẳng (hoặc nằm trên các đường thẳng song song) đều được thừa nhận trong bài học này thông qua việc quan sát. GV có thể thiết kế thêm các hoạt động bên ngoài (khi có đủ ánh sáng mặt trời) để giúp HS có thể kiểm chứng trực tiếp các tính chất trên.

3. Các hình không gian (như hình chóp, hình lăng trụ, hình hộp...) là các hình 3D và khi biểu diễn các hình này trên mặt phẳng, hình biểu diễn của chúng cần tuân thủ các nguyên tắc nhất định. Trong bài học này (và trong cả phần Hình học không gian), hình biểu diễn của một hình được hiểu là hình chiếu của hình đó qua một phép chiếu song song. Chú ý rằng đây không phải là cách duy nhất để biểu diễn một hình không gian trên mặt phẳng. Ngoài phép chiếu song song, ta còn có thể sử dụng phép chiếu xuyên tâm để nhận được một loại hình biểu diễn khác (hình chiếu phối cảnh) của hình ban đầu. Tuy nhiên hình biểu diễn (qua phép chiếu song song) đảm bảo được tỉ lệ của một số kích thước cũng như đảm bảo được một số đặc trưng hình học của hình ban đầu và do đó được sử dụng phổ biến hơn.

4. GV khuyến khích HS tìm thêm các hình ảnh về phép chiếu song song trong thực tiễn (ví dụ như tranh, ảnh liên quan đến bóng đổ...) và kiểm tra lại các tính chất của phép chiếu song song (như bảo toàn tính thẳng hàng, bảo toàn tỉ số độ dài đoạn thẳng...) trong các hình ảnh đó.

5. GV chuẩn bị: SGK, giáo án, hình ảnh liên quan đến các nội dung trong bài (ví dụ như các hình ảnh có bóng đổ dưới ánh mặt trời, hình ảnh về hình chiếu của vật thể trong Vẽ kĩ thuật...).

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 1,5 tiết lí thuyết + 0,5 tiết bài tập.

+ Tiết 1: Từ đầu đến trước Ví dụ 2.

+ Tiết 2: Từ Ví dụ 2 đến hết Vận dụng 2, Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giới thiệu về một tình huống trong thực tiễn cuộc sống mà ở đó sử dụng hình chiếu song song của vật thể.	GV triển khai như trong SGK. Các HS am hiểu về bóng đá có thể sẽ giải thích được rằng, khi một bàn thắng được ghi thì bóng của quả bóng (theo phương thẳng đứng) nằm hoàn toàn sau vạch vôi. Khi đó GV có thể yêu cầu HS mô tả chính xác "bóng của quả bóng", hay rộng hơn là bóng của một vật thể về mặt toán học là gì, từ đó dẫn đến khái niệm phép chiếu song song và hình chiếu song song.

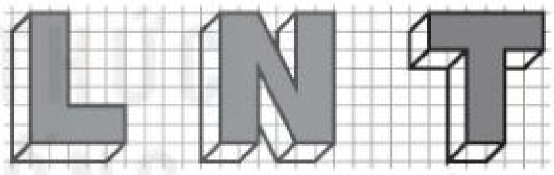
1. PHÉP CHIẾU SONG SONG		
HĐ1	HS quan sát được các đường thẳng nối mỗi điểm với ảnh của nó (qua phép chiếu song song) thì song song với nhau, từ đó biết cách xác định ảnh của một điểm qua phép chiếu song song khi biết phương chiếu và mặt phẳng chiếu.	GV triển khai như trong SGK. *Gợi ý:* a) HS có thể quan sát hình vẽ để đưa ra câu trả lời $AA' // BB' // CC' // DD'$. Để tăng tính chặt chẽ, GV có thể nhấn mạnh thêm rằng các tia sáng từ mặt trời được coi là đôi một song song, do đó AA', BB', CC', DD' đôi một song song. b) GV có thể gợi ý HS bằng cách đặt các câu hỏi như: "Ảnh của mỗi điểm trên khung cửa sổ thuộc mặt phẳng nào?", "Đường thẳng nối mỗi điểm trên khung cửa với ảnh của nó có song song với đường thẳng nào hay không?". Từ đó HS trả lời được rằng để xác định bóng của một điểm M trên khung cửa, ta vẽ đường thẳng qua điểm đó và song song với AA' cắt nền nhà tại M'. Điểm M' là điểm cần tìm.
Khung kiến thức	Định nghĩa phép chiếu song song và các thuật ngữ liên quan.	GV triển khai theo SGK. GV nhấn mạnh với HS hai yếu tố quan trọng trong phép chiếu song song là phương chiếu và mặt phẳng chiếu.
?	HS nhận biết được cách xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song.	GV có thể yêu cầu HS quan sát hình ảnh khung cửa sổ trong SGK để dự đoán ảnh của nó. GV cũng lưu ý HS rằng vì điểm A thuộc khung cửa nên ảnh A' của nó cũng thuộc ảnh của khung cửa. Từ đó HS đưa ra được định nghĩa về ảnh của một hình bất kì qua phép chiếu song song.
Khung kiến thức	Định nghĩa hình chiếu của một hình.	GV triển khai theo SGK. Ngoài ra trong hình ảnh về phố cổ Hội An, GV có thể nhấn mạnh đến bóng của người bán hàng rong trên mặt đất. Đây là một ví dụ thực tế về ảnh của một vật thể qua phép chiếu song song.

Chú ý	HS lưu ý một trường hợp đặc biệt: hình chiếu của một đường thẳng song song hoặc trùng với phương chiếu là một điểm.	– GV có thể sử dụng Hình 4.56b để cho HS thấy rằng hình chiếu của đường thẳng MM' theo phương chiếu Δ chỉ là một điểm M'. – GV cũng nói với HS rằng trường hợp đặc biệt này sẽ không được xét đến trong phần còn lại của bài học, đặc biệt là khi học về các tính chất của phép chiếu song song.
Ví dụ 1	HS xác định được hình chiếu của một điểm qua phép chiếu song song.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1		HS tự thực hiện. GV gọi HS trả lời. *Đáp án*: Hình chiếu của điểm A theo phương BC là D, theo phương BG là H.
Vận dụng 1	HS biết sử dụng khái niệm phép chiếu song song và hình chiếu để trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.	GV có thể yêu cầu HS tìm hiểu luật bàn thắng trong bóng đá và diễn đạt lại bằng các thuật ngữ liên quan đến phép chiếu song song vừa học. *Gợi ý:* Khi một bàn thắng được ghi, hình chiếu của quả bóng trên mặt đất theo phương thẳng đứng nằm hoàn toàn phía sau vạch vôi. *Chú ý:* Mặc dù HS chưa được học khái niệm vuông góc trong không gian, tuy nhiên khái niệm "phương thẳng đứng" là tương đối quen thuộc với HS vì các em đã biết tới khái niệm này trong môn Vật lí.
2. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG		
HĐ2	HS nhận biết được các tính chất của phép chiếu song song dựa trên quan sát.	– GV triển khai như trong SGK. – Sau khi HS quan sát và trả lời câu hỏi a, GV kết luận phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và giữ nguyên thứ tự các điểm, phép chiếu song song cũng biến

		đoạn thẳng thành đoạn thẳng. Một cách tự nhiên, nếu GV yêu cầu HS xác đỉnh ảnh của tia/ đường thẳng AC trên hình, HS có thể trả lời đó là tia/ đường thẳng $A'C'$. Vì vậy GV có thể kết luận phép chiếu song song biến tia thành tia, đường thẳng thành đường thẳng. – Sau khi HS trả lời câu hỏi b (bóng của hai song cửa song song với nhau), GV kết luận phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Để thuyết phục HS về trường hợp "trùng nhau", GV có thể lấy ví dụ về hai đường thẳng AC và $A'C'$ trong Hình 4.56a: Hai đường thẳng này song song và ảnh của chúng trùng nhau (cùng là đường thẳng $A'C'$). – Sau khi HS trả lời câu hỏi c, GV kết luận phép chiếu song song bảo toàn tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song. (GV cũng có thể yêu cầu HS đo trực tiếp trên hình minh hoạ trong SGK để kiểm tra lại kết quả trên).
Khung kiến thức	Các tính chất (thừa nhận) của phép chiếu song song.	GV triển khai theo SGK.
?	HS sử dụng định nghĩa hình chiếu của một hình qua phép chiếu song song để suy ra một tính chất của phép chiếu song song.	GV có thể yêu cầu HS chú ý đến giao điểm của hai đường thẳng cắt nhau và ảnh của điểm đó qua phép chiếu song song. GV có thể hỏi HS: "Ảnh của giao điểm có thuộc ảnh của hai đường thẳng hay không?".

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nhắc lại kiến thức	HS nhắc lại định nghĩa và các tính chất của phép chiếu song song.	GV gọi HS trả lời.
Ví dụ 2	HS sử dụng tính chất phép chiếu song song bảo toàn tính song song của hai đường thẳng để xác định ảnh của một số hình phẳng cơ bản.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2		HS tự thực hiện. *Gợi ý:* Vì $AB // CD$ nên hình chiếu của hai đường thẳng này song song với nhau, tức là $A'B' // C'D'$.
Ví dụ 3	HS sử dụng tính chất phép chiếu song song bảo toàn tỉ số độ dài đoạn thẳng để suy ra phép chiếu song song biến trung tuyến thành trung tuyến, đường trung bình thành đường trung bình.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 3		HS tự thực hiện. *Gợi ý:* Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC và D', E' tương ứng là hình chiếu của D, E. Khi đó $D'E'$ là hình chiếu của DE. Vì phép chiếu song song bảo toàn tỉ số độ dài đoạn thẳng nên D', E' là trung điểm của $A'B'$ và $A'C'$, suy ra $D'E'$ là đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.
3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN		
HĐ3	HS quan sát và nhận biết được hình thể hiện chính xác hình lập phương trên giấy.	GV giải thích với HS rằng, từ trước đến nay chúng ta luôn biểu diễn các hình không gian trên mặt phẳng (mặt bảng, mặt giấy...) và các hình biểu diễn này không hề được vẽ một cách tuỳ ý mà chúng cần tuân theo một nguyên tắc nhất định nhằm đảm bảo đúng một số kích thước (hoặc tỉ lệ) và một số đặc trưng hình học của các hình được biểu diễn.

Khung kiến thức	Định nghĩa hình biểu diễn của một hình.	GV triển khai theo SGK.
?	HS quan sát và thừa nhận các tính chất về hình biểu diễn của các hình phẳng cơ bản.	GV lưu ý với HS rằng các tính chất được nêu chỉ đúng khi mặt phẳng chứa hình phẳng không song song với phương chiếu.
Ví dụ 4	HS sử dụng các tính chất của hình biểu diễn của hình phẳng để vẽ hình biểu diễn của một số hình trong không gian.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 4		HS tự thực hiện. GV kiểm tra bài làm của HS. Trong Luyện tập 4, hình vẽ của HS cần thể hiện đúng đáy của hình chóp là hình bình hành.
Vận dụng 2	HS quan sát và nhận biết được cách sử dụng phép chiếu song song để vẽ dạng 3D của một số chữ cái đơn giản.	GV có thể yêu cầu HS quan sát cách tạo ra dạng 3D của chữ E như trong ví dụ, từ đó thực hiện tương tự với các chữ cái khác. Chú ý rằng theo cách tạo dạng nổi như trên, ta có thể nhận được dạng 3D của một chữ cái bằng cách nối mỗi điểm trên chữ cái đó (ở dạng phẳng) với mỗi điểm tương ứng trên hình chiếu của chữ cái đó. 
Bài tập 4.30	HS hiểu được khái niệm phép chiếu song song và áp dụng trong một bài tập cụ thể.	GV vẽ hình minh hoạ để giúp HS trả lời.
Bài tập 4.31	HS biết sử dụng tính chất của phép chiếu song song để giải bài tập.	GV có thể yêu cầu HS xem lại Ví dụ 3 như một gợi ý làm bài.

3. Phân loại bài tập

- Bài tập về tính chất của phép chiếu song song: Bài 4.29, 4.30, 4.31.
- Bài tập về hình biểu diễn của một hình trong không gian: Bài 4.32, 4.33.
- Bài tập vận dụng: Bài 4.34.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

4.29. a), d).

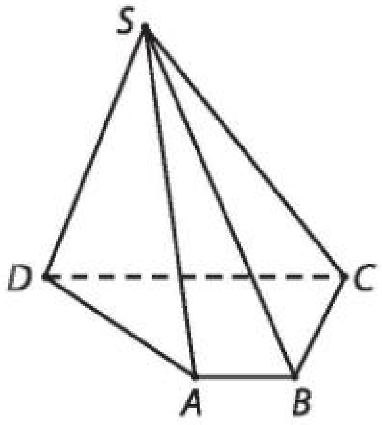
4.30. Theo đề bài ta có $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Do đó A, B, C là hình chiếu của A', B', C' trên mặt phẳng (ABC) theo phương AA'.

4.31. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và M' là hình chiếu của M thì theo Ví dụ 3, M' là trung điểm của $B'C'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và G' là hình chiếu của G. Khi đó A, G, M thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{AG}{GM} = 2$. Theo tính chất của phép chiếu song song suy ra A', G', M' thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{A'G'}{G'M'} = \dfrac{AG}{GM} = 2$. Vậy G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

4.32. Hình lục giác đều có đường chéo chính song song với hai cạnh không có đỉnh chung với đường chéo đó. Vì vậy nếu $ABCDEF$ là hình biểu diễn của một lục giác đều thì $AD \parallel BC \parallel EF$. Tuy nhiên hình vẽ trong bài không thể hiện điều này nên hình đó không là hình biểu diễn của một lục giác đều.

4.33. (H.4.15). Vì hình chóp $S.ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm nên hình biểu diễn của hình chóp cũng có đáy $AB \parallel CD$ và $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Do đó, ta vẽ hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB = \dfrac{1}{3}CD$, vẽ điểm S và nối SA, SB, SC, SD.



Hình 4.15

4.34. Hai thanh chắn AB, CD của thang song song với nhau và bóng của hai thanh chắn dưới ánh mặt trời là $A'B'$ và $C'D'$ có thể coi là hình chiếu của hai thanh chắn đó qua phép chiếu song song. Vì phép chiếu song song bảo toàn tính song song của hai đường thẳng nên $A'B' \parallel C'D'$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

GV cho HS tóm tắt lí thuyết đã học, lưu ý có hai dạng toán cơ bản đó là những bài toán chứng minh song song, những bài toán tìm giao tuyến có yếu tố song song, nhấn mạnh cho HS thấy được những tính chất nào được vận dụng vào bài toán tìm giao tuyến đó.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

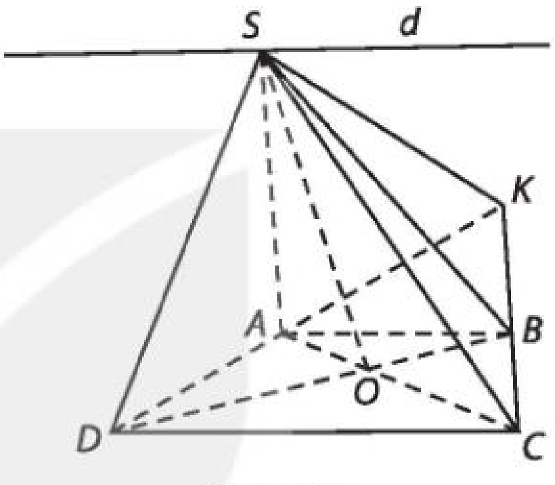
4.35. C **4.36.** B **4.37.** D **4.38.** A **4.39.** B **4.40.** D

4.41. (H.4.16). Gọi K là giao điểm của đường thẳng AD và đường thẳng BC.

a) $(SAD) \cap (SBC) = SK$.

b) $(SAB) \cap (SAC) = d$, ở đó d là đường thẳng đi qua S và song song với đường thẳng AB.

c) $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

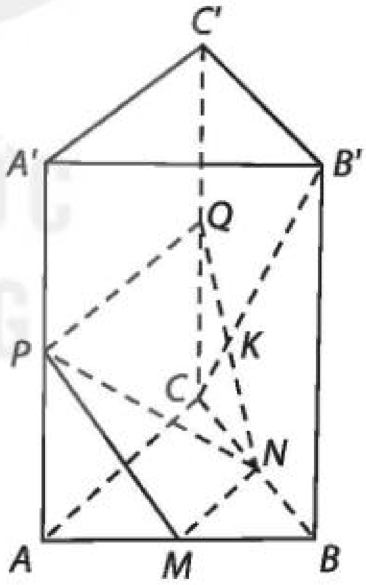


Hình 4.16

4.42. (H.4.17)

a) Gọi Q là trung điểm của CC', K là giao điểm của QN và $B'C$ thì K là giao điểm của mặt phẳng (MNP) và đường thẳng $B'C$.

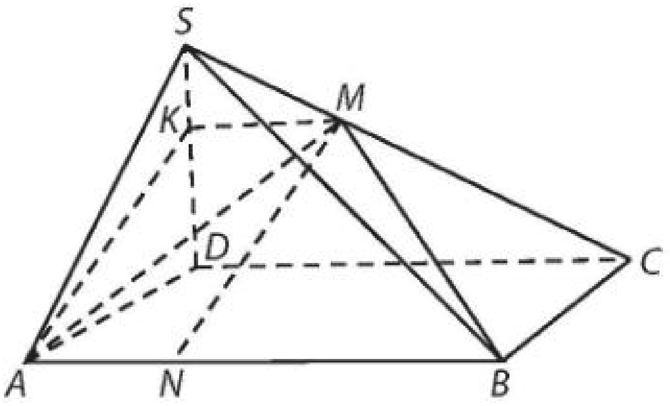
b) $\dfrac{KB'}{KC} = 3$.



Hình 4.17

4.43. (H.4.18). a) $KM \,//\, CD$ với K thuộc SD thì K là giao điểm của mặt phẳng (ABM) và đường thẳng SD; $\dfrac{SK}{SD} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{3}$.

b) Vì KM và AN song song và bằng nhau nên $AKMN$ là hình bình hành nên $MN \,//\, AK$, AK nằm trong (SAD) suy ra $MN \,//\, (SAD)$.

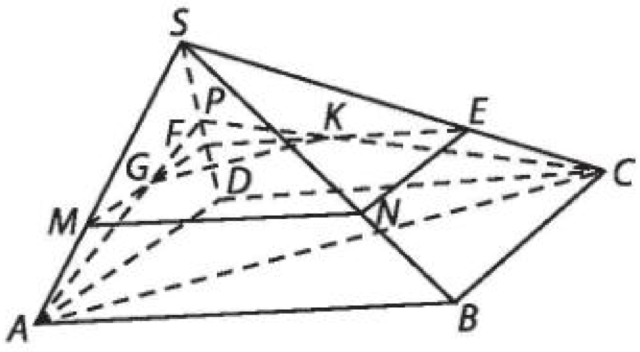


Hình 4.18

4.44. (H.4.19). a) AG và CK cùng đi qua trung điểm P của đoạn SD. Trong tam giác ACP thì $GK // AC$ mà AC nằm trong $(ABCD)$ nên $GK // (ABCD)$.

b) Có $MN // AB$, $EF // CD$, $AB // CD$ nên $MN // EF$. Tương tự: $MF // NE$.

Suy ra $MNEF$ là hình bình hành.



Hình 4.19

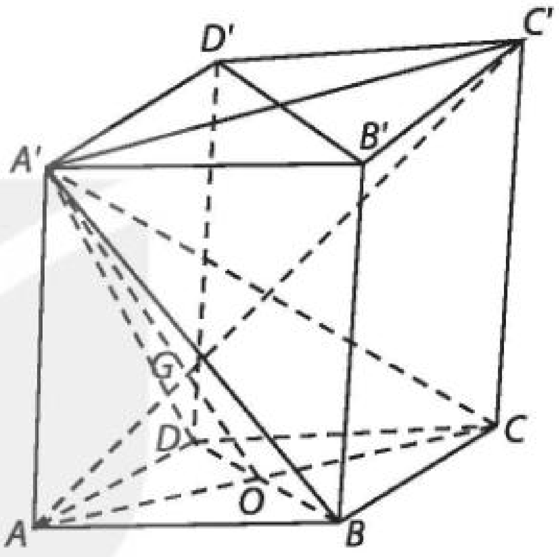
4.45. (H.4.20). a) Vì $BB'D'D$ là hình bình hành nên $BD // B'D'$. Vì $BD // B'D'$ nên $BD // (CB'D')$, $A'B // CD'$ nên $A'B // (CB'D')$. Do đó $(A'BD) // (CB'D')$.

Lấy K là trung điểm của đoạn AB thì ta có $(MNK) // (BB'D'D)$ nên $MN // (BB'D'D)$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $A'O$ là đường trung tuyến của tam giác $A'BD$.

Trong hình bình hành $ACC'A'$ thì $A'O$ cắt AC' tại G thì G là giao điểm của AC' với mặt phẳng $(A'BD)$.

Trong hình bình hành $ACC'A'$ có O là trung điểm của AC thì G là trọng tâm tam giác ACA' nên $\frac{A'G}{A'O} = \frac{2}{3} \Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác $A'BD$.

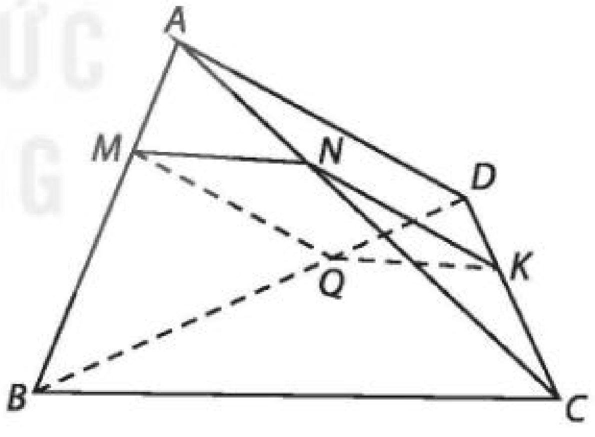


Hình 4.20

4.46. (H.4.21)

a) Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với BC và AD. Kẻ $MN // BC$ với N thuộc AC, $MQ // AD$ với Q thuộc BD, $NK // AD$ với K thuộc CD thì K là giao điểm của CD với mặt phẳng (P).

b) Ta có: $\frac{KC}{CD} = \frac{CN}{AC} = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{4}$.



Hình 4.21

CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

Chương này trình bày các khái niệm giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số và hàm số liên tục, cùng với một số định lí, quy tắc tính giới hạn. Các khái niệm giới hạn đóng vai trò quan trọng, làm cơ sở cho việc nghiên cứu các nội dung khác của Giải tích và cho phép giải quyết nhiều bài toán của khoa học và thực tiễn.

Nói riêng, nội dung giới hạn của hàm số là cơ sở để xây dựng khái niệm đạo hàm (một khái niệm trung tâm của Giải tích) và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số trong chương trình Toán 12.

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 3 bài học và 1 tiết Bài tập cuối chương, được thực hiện trong 7 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 15. Giới hạn của dãy số	2 tiết
Bài 16. Giới hạn của hàm số	2 tiết
Bài 17. Hàm số liên tục	2 tiết
Bài tập cuối chương V	1 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Các khái niệm giới hạn gắn với các *quá trình vô hạn*. Do vậy, đây là những khái niệm khó và thiếu tính trực quan. GV có thể mô tả các quá trình bằng cách lập bảng hoặc sử dụng đồ thị hàm số.
- Khái niệm giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua giới hạn của dãy số, khái niệm hàm số liên tục được định nghĩa thông qua giới hạn của hàm số. Do đó, việc HS nhận biết và giải thích được một số giới hạn cơ bản của dãy số đóng vai trò cốt yếu.
- Tính chất trung bình của hàm số liên tục không nằm trong kiến thức bắt buộc. GV cần lưu ý điều này khi ra bài tập cho HS.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết khái niệm giới hạn của dãy số.
- Giải thích một số giới hạn cơ bản.
- Vận dụng các phép toán giới hạn để tìm giới hạn của một số dãy số đơn giản.
- Tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng được kết quả đó để giải quyết một số tình huống thực tiễn giả định hoặc liên quan đến thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thông qua việc giải thích giới hạn dãy số.
- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học, năng lực giải quyết vấn đề thông qua việc vận dụng giới hạn dãy số mô tả/ giải thích các quá trình gắn với thực tiễn.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày giới hạn của dãy số ở đây và SGK Toán 11 cũ.
- GV chuẩn bị những hình vẽ mô tả các dãy số trong bài học.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng: 2 tiết.

- Tiết 1: Mục 1. Giới hạn hữu hạn của dãy số;

  Mục 2: Định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số.
- Tiết 2: Mục 3: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn;

  Mục 4: Giới hạn vô cực của dãy số;

  Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV mô tả lập luận của Zeno qua hình vẽ.
1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ		
HĐ1. Nhận biết dãy số có giới hạn là 0	Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn của dãy số, bắt đầu với giới hạn là 0.	– HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ1. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 1	Thực hành chứng minh dãy số có giới hạn là 0.	GV lưu ý HS: • $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$ với k là một số nguyên dương; • $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ nếu $\lvert q\rvert<1$; • Nếu $\lvert u_n\rvert\le v_n$ với mọi $n\ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.
Luyện tập 1	Luyện tập chứng minh dãy số có giới hạn là 0.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: Xét $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}$. Ta có $\lvert u_n\rvert\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\to 0$ khi $n\to+\infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.
HĐ2. Nhận biết dãy số có giới hạn hữu hạn	Giúp HS nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của dãy số.	– HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ2. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. – GV lưu ý HS: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-a)=0$.

Ví dụ 2	Thực hành chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn cho trước.	GV lưu ý HS hai bước thực hiện: (1) Tính $v_n = u_n - 2$; (2) Chứng minh $v_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.
Luyện tập 2	Luyện tập chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: Ta có $u_n = 3 - \frac{1}{2^n}$. Do đó $\lvert u_n - 3 \rvert = \frac{1}{2^n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.
Vận dụng 1	Mô tả một quá trình thực tế giả định bởi dãy số có giới hạn là 0.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: Theo giả thiết, với $n \geq 2$, ta có $u_n = \frac{2}{3}u_{n-1}$, $u_1 = \frac{2}{3} \cdot 5$. Từ đó, $u_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

2. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

HĐ3. Hình thành quy tắc tính giới hạn	Giúp HS hình thành các quy tắc tính giới hạn của dãy số.	– HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ3. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Bốn quy tắc đầu có thể gọi lần lượt là các quy tắc tổng, hiệu, tích và thương.
Ví dụ 3	Thực hành áp dụng các quy tắc tính giới hạn của dãy số.	GV lưu ý HS cách tính giới hạn của một dãy số có dạng phân thức hữu tỉ: chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất rồi áp dụng quy tắc tính giới hạn.
Luyện tập 3	Luyện tập tính giới hạn dãy số bằng cách áp dụng các quy tắc giới hạn.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}$ $= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}{1} = \sqrt{2}.$

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN		
HĐ4. Làm quen với việc tính tổng vô hạn	Hình thành công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.	– HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ4. – GV giúp HS ghi nhớ công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $$S = \frac{u_1}{1-q} \quad (\lvert q \rvert < 1).$$
Ví dụ 4	Thực hành tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.	GV lưu ý HS cách nhận dạng số hạng đầu u_1 và công bội q.
Ví dụ 5	Thực hành cách chuyển số thập phân vô hạn tuần hoàn thành phân số.	GV hướng dẫn HS cách viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.
Luyện tập 4	Luyện tập tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: Ta có $u_1 = 2$ và $q = \frac{1}{7}$. Do đó $S = \frac{2}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{3}$.
Vận dụng 2	Giải thích nghịch lí Zeno.	GV hướng dẫn HS thực hiện các yêu cầu trong bài tập vận dụng. *Gợi ý*: a) Để đến được A_2, A-sin mất khoảng thời gian là $t_1 = 1$ giờ. Trong khoảng thời gian này, rùa chạy được quãng đường dài 1 km, chính là khoảng cách từ A_2 đến A_3. Để chạy hết quãng đường A_2A_3, A-sin mất khoảng thời gian là $t_2 = \frac{1}{100}$ giờ và trong khoảng thời gian t_2, rùa chạy được quãng đường dài $\frac{1}{100}$ km, chính là khoảng cách từ A_3 đến A_4. Tiếp tục như vậy, để chạy hết quãng đường A_nA_{n+1}, A-sin mất khoảng thời gian là $t_n = \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$ giờ.

		b) Vậy tổng thời gian A-sin chạy hết các quãng đường A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_{n+1},... là $T = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^{n-1}} + \ldots$ (giờ). Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, $q = \frac{1}{100}$, nên ta có $T = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}$ (giờ). c) Zeno cho rằng A-sin không thể đuổi kịp rùa, tức là $T = +\infty$. Thực tế, $T = 1\frac{1}{99}$ giờ chính là thời gian cần thiết để A-sin đuổi kịp rùa.
4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ		
HĐ5. Nhận biết giới hạn vô cực	Giúp HS nhận biết khái niệm giới hạn vô cực của dãy số.	– GV hướng dẫn HS lập bảng, hình thành công thức $u_n = 2u_{n-1}$, $n > 1$, với $u_1 = 50$. Từ đó $u_n = 2^{n-1} \cdot 50$, $n > 1$. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý HS một số quy tắc của giới hạn vô cực.
Ví dụ 6	Thực hành tính giới hạn vô cực của dãy số.	GV lưu ý HS sử dụng quy tắc giới hạn vô cực của dãy số đã đề cập sau HĐ5.
Luyện tập 5	Luyện tập tính giới hạn vô cực của dãy số.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: Vì $n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ và $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 1$ khi $n \to +\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}(n - \sqrt{n}) = +\infty$.
Bài tập	GV gợi ý/ hướng dẫn HS làm một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Tính giới hạn của dãy số: Bài tập 5.1, 5.3.
- Vận dụng các quy tắc giới hạn: Bài tập 5.2.
- Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: Bài tập 5.4.
- Bài tập vận dụng: Bài tập 5.5, 5.6.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong Sách bài tập.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

5.1. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\dfrac{2}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}=1$.

5.2. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^2}{v_n-u_n}=\dfrac{2^2}{3-2}=4$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n+2v_n}=\sqrt{2+2\cdot 3}=\sqrt{8}$.

5.3. a) $u_n=\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$, $1+\dfrac{1}{n^2}\to 1$, $\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\to 0^+$ khi $n\to+\infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

b) $v_n=\dfrac{n^2+1}{\sqrt{2n^2+1}+n}=\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}+\dfrac{1}{n}}$. Từ đó ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

5.4. a) $1,(12)=1+\dfrac{12}{100}+\dfrac{12}{100^2}+\ldots=1+\dfrac{\dfrac{12}{100}}{1-\dfrac{1}{100}}=1\dfrac{12}{99}$.

b) $3,(102)=3+\dfrac{102}{1000}+\dfrac{102}{1000^2}+\ldots=3+\dfrac{\dfrac{102}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=3\dfrac{102}{999}$.

5.5. Gọi u_n là lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau n ngày dùng thuốc.

Ta có $u_1 = 150$ (mg).

Từ đó ta có $u_2 = u_1 \cdot \frac{1}{20} + 150 = 150 \cdot \frac{21}{20}$, $u_3 = u_2 \cdot \frac{1}{20} + 150 = 150 \cdot \frac{421}{400}$,

$$u_4 = u_3 \cdot \frac{1}{20} + 150 = 150 \cdot \frac{8421}{8000},\ u_5 = u_4 \cdot \frac{1}{20} + 150 = 150 \cdot \frac{168421}{160000}.$$

Tổng quát, ta có $u_n = u_{n-1} \cdot \frac{1}{20} + 150$. Nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài, lượng thuốc trong cơ thể được ước lượng bởi $a = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Khi đó, ta có $a = \frac{a}{20} + 150$, hay $a = 150 \cdot \frac{20}{19} \approx 158$ (mg).

5.6. Ta có $AA_1 = h \cdot \sin\alpha$, $A_1A_2 = AA_1 \cdot \sin\alpha = h \cdot \sin^2\alpha, \ldots$

Với $n \geq 2$, ta có $A_{n-1}A_n = h \cdot \sin^n \alpha$. Vậy độ dài đường gấp khúc là

$$L = h \cdot \sin\alpha + h \cdot \sin^2\alpha + \ldots + h \cdot \sin^n\alpha + \ldots = h \cdot \frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm và tại vô cực.
- Nhận biết khái niệm giới hạn một bên.
- Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực.
- Tính một số dạng giới hạn của hàm số.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với giới hạn của hàm số.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến giới hạn của hàm số; rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thông qua việc tính giới hạn của hàm số qua giới hạn của dãy số; rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học thông qua việc viết công thức hàm số mô tả mối liên quan giữa các đại lượng hình học.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày giới hạn hàm số ở đây và SGK Toán 11 cũ.
- GV nên sử dụng đồ thị hàm số để minh hoạ cho giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực.
- GV chuẩn bị máy tính có phần mềm GeoGebra để vẽ đồ thị hoặc các đồ thị in ra giấy khổ lớn.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.

+ Tiết 1: Mục 1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.
+ Tiết 2: Mục 2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực;
Mục 3. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm;
Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV mô tả vắn tắt công thức khối lượng trong trường hợp vật chuyển động để thấy khi vận tốc của vật tăng thì khối lượng của nó cũng tăng. Chú ý rằng vận tốc ánh sáng là vận tốc tới hạn.
1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM		
HĐ1. Nhận biết khái niệm giới hạn tại một điểm	Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn hàm số tại một điểm thông qua giới hạn dãy số đã biết.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. – Sau khi tính được giới hạn dãy số $\left(f\left(x_n\right)\right)$ với $x_n=\frac{2n+1}{n}$, GV hướng dẫn HS xét trường hợp x_n bất kì sao cho $x_n \neq 2$ và $x_n \to 2$. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.

Ví dụ 1	Tính giới hạn hàm số cụ thể bằng cách sử dụng định nghĩa.	GV hướng dẫn HS thực hiện các bước theo định nghĩa: (1) Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$. (2) Rút gọn $f(x_n)$. (3) Tính giới hạn $(f(x_n))$.
Quy tắc giới hạn	Hình thành các quy tắc giới hạn.	– HS nhắc lại các quy tắc giới hạn của dãy số. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung các quy tắc.
Ví dụ 2	Thực hành các quy tắc giới hạn của hàm số.	Thực hành các quy tắc giới hạn của tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số. Lưu ý quy tắc $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n, n \in \mathbb{N}$.
Ví dụ 3	Xét trường hợp không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số khi giới hạn của mẫu số bằng 0.	GV lưu ý HS kiểu giới hạn $\frac{0}{0}$, cần biến đổi về dạng có thể áp dụng quy tắc giới hạn của thương hai hàm số.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tính giới hạn của hàm số tại một điểm.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $= \lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = 2.$
HĐ2. Nhận biết khái niệm giới hạn một bên	Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn một bên của hàm số.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 4	Thực hành tính giới hạn trái và giới hạn phải của hàm số cho bởi hai biểu thức.	GV lưu ý HS cách xác định giá trị hàm số khi $x \to 1^+$ và khi $x \to 1^-$.

Luyện tập 2	Thực hành tính giới hạn một bên của hàm số, đồng thời thể hiện mối liên hệ giữa giới hạn một bên của hàm số với giới hạn của hàm số tại một điểm.	HS tự làm tại lớp. GV nhấn mạnh mối liên hệ giữa giới hạn một bên của hàm số và giới hạn của hàm số tại một điểm. *Gợi ý*: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$. Từ đó ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC		
HĐ3. Nhận biết khái niệm giới hạn tại vô cực	Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực.	– HS thực hiện yêu cầu của HĐ3. GV minh hoạ kết quả bằng đồ thị. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 5	Thực hành tính giới hạn của hàm số tại vô cực, trong cả hai trường hợp $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.	GV lưu ý HS: $x_n \to \pm\infty$ thì $\dfrac{1}{x_n} \to 0$.
Ví dụ 6	Vận dụng các quy tắc giới hạn tại vô cực.	GV nhấn mạnh, các quy tắc giới hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn tại vô cực. GV lưu ý HS công thức: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & a \ge 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, & a < 0. \end{cases}$
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng tính giới hạn của hàm số tại vô cực.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = 1.$
Vận dụng	Vận dụng khái niệm giới hạn của hàm số tại	GV hướng dẫn HS thực hiện các yêu cầu của bài toán:

	một điểm và tại vô cực để giải một bài toán hình học.	*Gợi ý*: a) Tính h theo a: Chú ý $OH \cdot AB = OA \cdot OB$ (hai lần diện tích ΔABC). Do đó $h\sqrt{1+a^2} = a$. Vậy $h = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. b) Khi A dịch chuyển về O thì $a \to 0$. Khi đó $h \to 0$, tức là độ dài OH dần đến 0. Nói cách khác H cũng dịch chuyển về O. c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox thì $a \to +\infty$. Khi đó $h \to 1$. Tức là H dịch chuyển về B.
3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM		
a) Giới hạn vô cực		
HĐ4. Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực	Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn vô cực.	– HS thực hiện yêu cầu của HĐ4. GV minh hoạ kết quả bằng đồ thị. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý HS các khái niệm giới hạn một bên tương ứng.
Ví dụ 7	Thực hành tính giới hạn vô cực của hàm số.	GV nhắc lại quy tắc giới hạn vô cực của dãy số.
HĐ5. Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực một bên	Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn vô cực một bên.	HS thực hiện các yêu cầu của HĐ5. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 8	Giải bài toán ở tình huống mở đầu.	GV lưu ý HS: v tiến gần tới vận tốc ánh sáng có nghĩa là $v \to c^-$. Khi đó $\dfrac{v^2}{c^2} \to 1^-$ và mẫu số của biểu thức khối lượng tiến tới 0.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng tính giới hạn vô cực và giới hạn vô cực một bên.	– HS tự làm tại lớp. – GV hướng dẫn HS cách định nghĩa các giới hạn vô cực tại vô cực.

		Gợi ý: a) Với $x_n \neq 0, x_n \to 0,$ ta có $\lvert x_n \rvert \to 0$ và $\lvert x_n \rvert > 0$. Do vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{\lvert x_n \rvert} = +\infty$. Từ đó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{\lvert x \rvert} = +\infty$. b) Với $x_n < 2, x_n \to 2$ ta có $\sqrt{2 - x_n} \to 0^+$. Do đó $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2 - x_n}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}} = +\infty$.
b) Một số quy tắc tính giới hạn vô cực		
Quy tắc tích và quy tắc thương cho giới hạn vô cực	Hình thành quy tắc tích và quy tắc thương cho giới hạn vô cực.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu bảng quy tắc tích và bảng quy tắc thương.
Ví dụ 9	Thực hành quy tắc thương cho giới hạn vô cực.	GV lưu ý HS: khi giới hạn của mẫu số bằng 0 thì phải xét dấu của mẫu số.
Ví dụ 10	Thực hành quy tắc tích và quy tắc thương cho giới hạn vô cực một bên.	GV lưu ý HS về các giới hạn $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1 - x} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{1 - x} = +\infty$.
Luyện tập 5	Củng cố kĩ năng sử dụng quy tắc thương cho giới hạn vô cực.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý* : Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 1) = 3 > 0$, $\lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0$. Hơn nữa, $x - 2 > 0$ khi $x \to 2^+$. Áp dụng quy tắc thương, ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x - 1}{x - 2} = +\infty$. Lập luận tương tự, ta có $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x - 1}{x - 2} = -\infty$.
Bài tập	GV gợi ý/ hướng dẫn HS làm một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Củng cố khái niệm giới hạn của hàm số tại một điểm: Bài tập 5.7.
- Tính giới hạn của hàm số tại một điểm: Bài tập 5.8.
- Tính giới hạn một bên: Bài tập 5.9, 5.11.
- Tính giới hạn vô cực: Bài tập 5.10.
- Tính giới hạn tại vô cực: Bài tập 5.12.
- Chứng minh và vận dụng tính chất so sánh của giới hạn: Bài tập 5.13.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong Sách bài tập.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

5.7. Ta có $f(x) \neq g(x)$ do hai hàm này có tập xác định khác nhau. Tuy vậy, nếu $x \neq 1$ thì $f(x) = g(x)$. Từ đó $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

5.8. a) Ta có $\dfrac{(x+2)^2 - 4}{x} = \dfrac{x^2 + 4x}{x} = x + 4$ với $x \neq 0$. Do đó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+2)^2 - 4}{x} = 4$.

b) Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 9} + 3\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \dfrac{1}{6}$.

5.9. Rõ ràng $\lim\limits_{t \to 0^+} H(t) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} H(t) = 0$.

5.10. a) Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 2) = -1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$ và $x - 1 > 0$ khi $x > 1$.

Do đó $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 2}{x - 1} = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} \left(x^2 - x + 1\right) = 13$, $\lim\limits_{x \to 4^-} (4 - x) = 0$ và $4 - x > 0$ với $x < 4$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2 - x + 1}{4 - x} = +\infty$.

5.11. Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 3) = -1$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2 - x} = \lim\limits_{x \to 2^-} (3 - x) = 1$.

5.12. a) Chia cả tử số và mẫu số cho x, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-2\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=-2.$$

b) Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

5.13. Rõ ràng $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)(x-2)=0$ và $(x-1)(x-2)>0$ khi $x>2$.

Do vậy $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$.

Lập luận tương tự, ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$.

Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận dạng hàm số liên tục tại một điểm, hoặc trên một khoảng, trên một đoạn.
- Nhận dạng tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục.
- Nhận biết tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản trên tập xác định của chúng.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học và năng lực mô hình hoá toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến hàm số liên tục.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày hàm số liên tục ở đây và SGK Toán 11 cũ.

– GV nên sử dụng đồ thị hàm số để minh hoạ cho tính chất liên tục của hàm số. Dựa vào đồ thị của các hàm số sơ cấp đã biết để khẳng định tính liên tục của chúng trên từng khoảng xác định.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng: 2 tiết.

+ Tiết 1: Mục 1: Hàm số liên tục tại một điểm;
Mục 2: Hàm số liên tục trên một khoảng.

+ Tiết 2: Mục 3: Một số tính chất cơ bản;
Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	Đây là bài toán về vận tốc trung bình. Vận tốc trung bình trên cả hành trình là $v_a = 60$ km/h. Cần chứng tỏ rằng, có ít nhất một thời điểm xe chạy với vận tốc là v_a.
1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM		
HĐ1. Nhận biết tính liên tục của hàm số tại một điểm	Giúp HS hình thành khái niệm hàm số liên tục tại một điểm thông qua giới hạn của hàm số tại điểm đó.	– HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ1. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 1	Thực hành xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.	GV lưu ý HS điểm cần xét phải thuộc tập xác định của hàm số.
Ví dụ 2	Thực hành chứng minh tính gián đoạn của hàm số tại một điểm.	GV lưu ý HS khi các giới hạn bên phải và bên trái tại một điểm không bằng nhau thì hàm số gián đoạn tại điểm này.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng xét tính liên tục của hàm số.	– HS tự làm tại lớp.

		– GV lưu ý HS quy tắc: Hàm số f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. *Gợi ý* : Với hàm số $f(x)=\begin{cases} -x & \text{nếu } x<0 \\ 0 & \text{nếu } x=0 \\ x^2 & \text{nếu } x>0, \end{cases}$ ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ và $f(0) = 0$. Do đó hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG		
HĐ2. Nhận biết hàm số liên tục trên một khoảng	Giúp HS hình thành khái niệm hàm số liên tục trên một khoảng.	– HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ2. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. – GV nhấn mạnh tính chất liên tục của hàm số trên một khoảng thể hiện bởi hình ảnh đồ thị của hàm số là đường liền trên khoảng đó.
Ví dụ 3	Thực hành xét tính liên tục của hàm số trên nửa khoảng.	GV lưu ý HS khi xét tính liên tục của hàm số trên nửa khoảng $(a;b]$, phải kiểm tra điều kiện $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Tương tự cho trường hợp trên nửa khoảng $[a;b)$.
Tính liên tục của một số hàm sơ cấp	Khẳng định tính liên tục của một số hàm sơ cấp như hàm đa thức, hàm căn thức, hàm phân thức hữu tỉ và hàm lượng giác trên từng khoảng xác định của chúng.	GV cho HS quan sát đồ thị của các hàm sơ cấp đã biết.

Ví dụ 4	Thực hành tìm các khoảng trên đó hàm số liên tục.	GV gợi ý HS cách tìm các khoảng liên tục đối với hàm phân thức.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tìm các khoảng trên đó hàm số liên tục.	HS tự làm tại lớp. Rõ ràng hàm số $f\left(x\right)$ là hàm phân thức hữu tỉ. Hàm số này liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(-2;+\infty\right)$.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN		
HĐ3. Nhận dạng tính liên tục của tổng hai hàm số	Giúp HS nhận dạng tính chất liên tục của tổng hai hàm số. Tổng quát, khẳng định tính liên tục của tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm liên tục.	– HS thực hiện các yêu cầu trong HĐ3. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. – GV lưu ý các tính chất này có được nhờ áp dụng quy tắc giới hạn của tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số.
Ví dụ 5	Thực hành xét tính liên tục của thương của hai hàm liên tục.	GV lưu ý HS tử số và mẫu số của hàm số cho trong Ví dụ 5 là các hàm sơ cấp, tính liên tục của chúng trên các khoảng xác định đã được biết.
Tính chất của hàm liên tục trên một đoạn	Trình bày một tính chất quan trọng của hàm liên tục, gọi là tính chất trung bình.	GV minh hoạ kết quả bằng đồ thị.
Ví dụ 6	Thực hành chứng minh một phương trình có nghiệm.	GV lưu ý cách sử dụng tính chất của hàm liên tục trên một đoạn như một phương pháp chứng minh một phương trình có nghiệm.
Vận dụng	Giải bài toán ở tình huống mở đầu.	GV gợi ý HS áp dụng tính chất của hàm liên tục cho hàm số $f\left(t\right)=v\left(t\right)-60$, ở đó $v\left(t\right)$ là hàm biểu thị vận tốc tại thời điểm t.

		Theo giả thiết, vận tốc trung bình của xe là $v_a = 60$ (km/h). Tại thời điểm xuất phát t_0, vận tốc của xe $v(t_0) = 0$ nên có một thời điểm t_1 xe chạy với vận tốc $v(t_1) > v_a$. Rõ ràng, hàm $f(t) = v(t) - v_a$ là hàm liên tục trên đoạn $\left[t_0, t_1\right]$. Hơn nữa, ta có $f(t_0) = -v_a < 0$, $f(t_1) = v(t_1) - v_a > 0$, nên tồn tại thời điểm $t^* \in (t_0; t_1)$ sao cho $f(t^*) = 0$. Khi đó, ta có $v(t^*) = 60$.
Bài tập	GV gợi ý/hướng dẫn HS làm một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Củng cố khái niệm hàm số liên tục tại một điểm: Bài tập 5.14.
- Xét tính liên tục của hàm số: Bài tập 5.15, 5.16.
- Vận dụng giải bài toán thực tế: Bài tập 5.17.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong Sách bài tập.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

5.14. Ta có $2f(1) - g(1) = 3$. Do $f(1) = 2$ nên $g(1) = 1$.

5.15. a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$. Do $f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên D.

b) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Xét tại điểm $x = 1$, ta thấy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(1 + x^2\right) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(4 - x\right) = 3$.

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

5.16. Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu nó liên tục tại $x = 0$. Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-x + m\right) = m$ và $f\left(0\right) = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $m = 0$.

5.17. a) Kí hiệu $f(x)$ là số tiền phải trả theo quãng đường di chuyển (tính theo km). Ta thấy:

- Với $x \in [0;0,5]$, $f(x) = 10000$.
- Với $x \in (0,5;30]$, $f(x) = 10000 + (x-0,5) \cdot 13500$.
- Với $x > 30$, $f(x) = 10000 + 29,5 \cdot 13500 + (x-30) \cdot 11000$.

b) Hàm số f liên tục trên $[0;+\infty)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương (có thể chuẩn bị bài trình chiếu dạng sơ đồ hoá).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

5.18. D

5.19. B

5.20. C

5.21. B

5.22. B

5.23. C

5.24. B

5.25. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5.26. Ta có

a) $u_n = \dfrac{n^2}{3n^2+7n-2} = \dfrac{1}{3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{2}{n^2}}$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

b) $$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+5^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{6}}$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 6\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right).$$ Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 8$.

c) $|w_n| = \dfrac{|\sin n|}{4n} \le \dfrac{1}{4n} \to 0$ khi $n \to +\infty$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

5.27. Ta có

a) $1,(01)=1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100^2}+\ldots=1+\dfrac{\dfrac{1}{100}}{1-\dfrac{1}{100}}=1\dfrac{1}{99}$.

b) $5,(132)=5+\dfrac{132}{1000}+\dfrac{132}{1000^2}+\ldots=5+\dfrac{\dfrac{132}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=5\dfrac{132}{999}$.

5.28. Ta có

a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\dfrac{1}{6}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{(1-x)^2}=+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{2}$.

5.29. a) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{|x-3|}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=6$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}=+\infty$.

5.30. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$. Do đó, giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.

5.31. a) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} \text{ nếu } x\neq 0,\\ 1 \text{ nếu } x=0\end{cases}$ tại điểm $x=0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$.

Vậy không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $g(x)=\begin{cases}1+x \text{ nếu } x<1,\\ 2-x \text{ nếu } x\geq 1\end{cases}$ tại điểm $x=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)=2$.

Do đó không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

5.32. Xét hàm số $F(r)=\begin{cases}\dfrac{GMr}{R^3} \text{ nếu } r<R\\ \dfrac{GM}{r^2} \text{ nếu } r\geq R.\end{cases}$

Hàm số này liên tục trên các khoảng $(-\infty;R)$ và $(R;+\infty)$. Xét tại điểm $r=R$. Ta có $F(R)=\dfrac{GM}{R^2}$. Hơn nữa, $\lim\limits_{r\to R^+} F(r)=\lim\limits_{r\to R^+}\dfrac{GM}{r^2}=\dfrac{GM}{R^2}$, $\lim\limits_{r\to R^-} F(r)=\lim\limits_{r\to R^-}\dfrac{GMr}{R^3}=\dfrac{GM}{R^2}$.

Vậy $\lim\limits_{r\to R^+} F(r)=\lim\limits_{r\to R^-} F(r)=F(R)$. Hàm số $F(r)$ liên tục tại $r=R$.

5.33. a) Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2+5x+6}$. Hàm số $f(x)$ xác định trên các khoảng $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)$ và $(-2;+\infty)$. Trên các khoảng này, $f(x)$ có dạng thương của hai hàm liên tục (hàm lượng giác và hàm đa thức).

b) Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x-2}{\sin x}$. Hàm số này xác định trên các khoảng $(k\pi;(k+1)\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$. Trên các khoảng này, $g(x)$ là thương của hai hàm liên tục (hàm đa thức và hàm lượng giác).

5.34. Hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ nếu } x\leq a,\\ x^2 \quad \text{nếu } x>a\end{cases}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;a)$ và $(a;+\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x=a$. Rõ ràng $f(a)=a+1=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Hơn nữa, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=a^2$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=a$ khi và chỉ khi $a^2=a+1$, hay $a=\dfrac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$.

Chương VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

Mục đích chính của chương này là xây dựng khái niệm luỹ thừa với số mũ thực và khái niệm lôgarit, các tính chất cơ bản và các quy tắc tính toán tương ứng của chúng. Từ đó giới thiệu hai loại hàm số mới, có nhiều ứng dụng trong thực tiễn là hàm số mũ, hàm số lôgarit và trình bày cách giải một số phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

Hàm số mũ và hàm số lôgarit trình bày trong chương này, cùng với các hàm đa thức, hàm phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác giới thiệu trước đó, tạo thành các hàm số sơ cấp cơ bản, được nghiên cứu tương đối trọn vẹn trong chương trình Toán phổ thông. Những hàm số này là chất liệu cho các nội dung Giải tích như giới hạn, tính liên tục, đạo hàm, tích phân được trình bày trong chương trình Toán phổ thông, cũng như xuất hiện trong những mô hình toán học cho các bài toán thực tiễn.

2 Cấu tạo chương

- Tổng thời lượng: 8 tiết.
- Nội dung:

Bài 18. Luỹ thừa với số mũ thực	2 tiết
Bài 19. Lôgarit	2 tiết
Bài 20. Hàm số mũ và hàm số lôgarit	1 tiết
Bài 21. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit	2 tiết
Bài tập cuối chương VI	1 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Theo tinh thần chung của CT GDPT môn Toán năm 2018 là giảm tính hàn lâm, những bài tập nội dung thuần tuý toán về luỹ thừa, lôgarit (như tính toán, rút gọn,...), giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit được giảm nhẹ rất nhiều. Các tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit (như tập giá trị, tính đơn điệu) được rút ra từ đồ thị.

  Bên cạnh việc giảm tính hàn lâm và giảm mức độ của các bài tập thuần tuý toán, một điểm mới nổi bật trong SGK Toán 11 mới này là những ứng dụng thực tế của hàm số mũ và hàm số lôgarit được đặc biệt chú trọng. Điều này thể hiện rất rõ trong những bài toán ở Tình huống mở đầu, Vận dụng, những bài tập thực tiễn phong phú trình bày trong SGK. Đây có thể coi là một khác biệt cơ bản so với các SGK Toán 11 trước đây.

- Theo yêu cầu của chương trình mới, HS nên được tham gia tích cực vào các hoạt động trong bài học, từ các hoạt động hình thành kiến thức mới đến các hoạt động luyện tập, vận dụng. SGK đã cố gắng thiết kế các hoạt động tương ứng. GV chỉ nên gợi ý, hướng dẫn cho HS (nếu cần) trong các hoạt động này, hạn chế việc làm thay (hoàn toàn) cho HS.
- Về hình thức dạy học:
  + Nếu có điều kiện thì GV nên chuẩn bị sẵn slides phần đề bài của các hoạt động. Đến hoạt động nào thì trình chiếu yêu cầu của hoạt động đó lên cho HS theo dõi và thực hiện. Việc này vừa tiết kiệm thời gian viết bảng, vừa sinh động hơn vừa giúp HS tập trung hơn vào yêu cầu của GV.
  + Với mỗi hoạt động, GV có thể cho HS làm việc cá nhân hoặc hoạt động nhóm (tuỳ tính chất của hoạt động). Sau đó yêu cầu HS trình bày câu trả lời (bằng miệng, giơ bảng trả lời, viết bảng,...). GV nhận xét và tổng kết, đặc biệt lưu ý phương pháp giải và các sai lầm thường mắc.
  + Với các ví dụ đơn giản trong bài học, GV có thể để HS tự làm và chỉ gợi ý khi cần. Tuy nhiên, với các ví dụ phức tạp hơn, thì có thể xử lí tuỳ theo trình độ chung của HS trong lớp. Nếu ở lớp HS khá, GV chỉ cần phân tích đề bài, gợi ý để HS có thể tự làm sau đó sẽ nhận xét và tổng kết phương pháp giải. Còn ở lớp với trình độ chung của HS không tốt, GV có thể chữa mẫu và phân tích kĩ cách giải (theo lược đồ 4 bước của Polya). Sau đó yêu cầu HS làm các bài tập tương tự trong phần Luyện tập, Vận dụng, GV quan sát và trợ giúp HS khi cần.
- Trong mỗi bài học, các gợi ý dạy học cho từng bài học chỉ là một phương án đề xuất. GV có thể dựa trên kinh nghiệm giảng dạy của mình và trình độ chung của HS trong lớp để có thể có phương án hợp lí hơn, miễn là đảm bảo mục tiêu của bài học và HS được tham gia tích cực vào các hoạt động.

B CÁC BÀI HỌC CỤ THỂ

Bài 18. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên của một số thực khác 0; luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực của một số thực dương.

- Giải thích được các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên, luỹ thừa với số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực.
- Sử dụng được tính chất của phép tính luỹ thừa trong tính toán các biểu thức số và rút gọn các biểu thức chứa biến.
- Tính được giá trị biểu thức số có chứa phép tính luỹ thừa bằng sử dụng máy tính cầm tay.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với phép tính luỹ thừa.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua những bài toán thực tiễn liên quan đến luỹ thừa với số mũ thực.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày khái niệm luỹ thừa với số mũ thực ở đây và SGK Toán THPT trước đây. Tuy nhiên, theo tinh thần của chương trình mới, chúng tôi nhấn mạnh đến ứng dụng của luỹ thừa trong các bài toán thực tế và giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán liên quan đến khái niệm luỹ thừa với số mũ thực.
- Chuẩn bị:
  - GV: Chuẩn bị thông tin về một số mô hình thực tế liên quan đến sự xuất hiện của luỹ thừa.
  - HS: Ôn lại khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên dương, căn bậc hai và căn bậc ba đã học ở SGK Toán THCS; chuẩn bị máy tính cầm tay để tính toán các luỹ thừa với số mũ thực.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.
  - Tiết 1: Mục 1. Luỹ thừa với số mũ nguyên;
    Mục 2. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ.
  - Tiết 2: Mục 3. Luỹ thừa với số mũ thực;
    Gợi ý chữa một số bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống lãi kép để kích thích nhu cầu học tập của HS, chứ chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết. Chú ý rằng công thức lãi kép được cung cấp ở đây là công thức tổng quát. Tất cả các công thức lãi kép khác dùng trong chương này đều có thể suy ra từ công thức tổng quát này (tuy nhiên, để thuận lợi cho HS, trong các bài tập cụ thể, chúng tôi đều cung cấp sẵn công thức cần thiết).
1. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN		
HĐ1. Nhận biết luỹ thừa với số mũ nguyên	Giới thiệu định nghĩa và các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 1	Rèn luyện cho HS kĩ năng tính luỹ thừa với số mũ nguyên.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng viết một số cho trước dưới dạng kí hiệu khoa học, tức là dưới dạng luỹ thừa với số mũ nguyên của 10.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*. a) $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; b) $1{,}67262 \cdot 10^{-27}$ kg.
2. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ		
HĐ2. Nhận biết khái niệm căn bậc *n*	Giúp HS nhận biết khái niệm căn bậc *n*.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.

Nhận xét		GV lưu ý điều kiện tồn tại của căn bậc *n* trong hai trường hợp *n* chẵn và *n* lẻ.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng tìm căn bậc *n* của một số trong trường hợp đơn giản.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tìm căn bậc *n* của một số trong trường hợp đơn giản.	HS tự làm tại lớp.
HĐ3. Nhận biết tính chất của căn bậc *n*	Giúp HS nhận biết tính chất của căn bậc *n*.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 3	Rèn luyện kĩ năng vận dụng các tính chất của căn bậc *n* trong tính toán.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng vận dụng các tính chất của căn bậc *n* trong tính toán.	HS tự làm tại lớp.
HĐ4. Nhận biết luỹ thừa với số mũ hữu tỉ	Giúp HS nhận biết khái niệm luỹ thừa với số mũ hữu tỉ.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ4. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. Câu hỏi sau Khung kiến thức là để khắc sâu điều kiện có nghĩa của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ.
Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng vận dụng định nghĩa của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ trong tính toán.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 4	Rèn luyện kĩ năng vận dụng định nghĩa của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ trong rút gọn biểu thức chứa biến.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý* $A = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}y + xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{xy(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = xy.$

Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC		
a) Khái niệm luỹ thừa với số mũ thực		
HĐ5. Nhận biết luỹ thừa với số mũ thực	Giúp HS nhận biết khái niệm luỹ thừa với số mũ thực, như là giới hạn của dãy luỹ thừa với số mũ hữu tỉ.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ5. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. Đây là khái niệm khó và trừu tượng đối với HS, do đó GV cần lưu ý khi giảng dạy.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng rút gọn biểu thức chứa biến liên quan đến luỹ thừa với số mũ thực.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 6	Rèn luyện kĩ năng so sánh hai luỹ thừa với số mũ thực, bằng cách đưa về cùng cơ số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 5	Củng cố kĩ năng rút gọn biểu thức chứa biến liên quan đến luỹ thừa với số mũ thực.	HS tự làm tại lớp.
Vận dụng	Vận dụng kiến thức, kĩ năng trong bài học để giải quyết bài toán thực tế trong tình huống mở đầu.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. *Gợi ý.* Số tiền cả vốn lẫn lãi bác Minh thu được sau 3 năm là $100 \cdot (1+6\%)^3 \approx 119{,}1$ (triệu đồng).
b) Tính luỹ thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay		
Tính luỹ thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay	Rèn luyện kĩ năng tính toán luỹ thừa bằng máy tính cầm tay.	HS thực hành dưới sự hướng dẫn của GV. GV lưu ý hướng dẫn phím bấm thích hợp trên loại máy tính cầm tay mà HS sử dụng.

Chữa bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Tính luỹ thừa với số mũ thực: Các Bài tập 6.1, 6.2.
- Rút gọn biểu thức: Các Bài tập 6.3, 6.4, 6.5.
- Ứng dụng thực tế của luỹ thừa: Các Bài tập 6.7, 6.8.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong Sách bài tập và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

6.1. a) 25; b) 8; c) 4; d) 8.

6.2. a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5} = 9 + \frac{1}{27} - 5 = \frac{109}{27}$;

b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}} = 2^{2\cdot(2-3\sqrt{7})} \cdot 2^{6\sqrt{7}} = 2^{2\cdot(2-3\sqrt{7})+6\sqrt{7}} = 2^4 = 16.$

6.3. a) $A = \frac{x^5y^{-2}}{x^3y} = \frac{x^{5-3}}{y^{1+2}} = \frac{x^2}{y^3}$;

b) $B = \frac{x^2y^{-3}}{\left(x^{-1}y^4\right)^{-3}} = \frac{x^2y^{-3}}{x^3y^{-12}} = x^{2-3}y^{-3+12} = x^{-1}y^9 = \frac{y^9}{x}.$

6.4. a) $\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}\right)}{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{xy}$;

b) $\left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} = \frac{x^{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}}{y^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} = \frac{x^{3+\sqrt{3}}}{y^2} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} = \frac{x^2}{y^0} = x^2.$

6.5. Ta có: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left(1+\sqrt{3}\right) + \left(1-\sqrt{3}\right) = 2.$

6.6. a) Do $5 > 1$ và $6\sqrt{3} = \sqrt{36}\sqrt{3} = \sqrt{108} > 3\sqrt{6} = \sqrt{54}$ nên $5^{6\sqrt{3}} > 5^{3\sqrt{6}}$;

b) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$.

Do $2 > 1$ và $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} > \frac{7}{6}$ nên $2^{\frac{4}{3}} > 2^{\frac{7}{6}}$, tức là $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} > \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

6.7. Do người đó gửi tiết kiệm với kì hạn 6 tháng nên $n = 2$. Sau 2 năm thì ta được 4 lần tính lãi. Số tiền thu được của người ấy sau 2 năm là $120 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{2}\right)^4 \approx 132,46$ (triệu đồng).

6.8. Thay $t = 20$ vào công thức đã cho ở đề bài, ta có: $A = 19 \cdot 2^{\frac{20}{30}} \approx 30$ (triệu người).

Vậy sau 20 năm kể từ năm 2021, dân số của quốc gia đó là khoảng 30 triệu người.

Bài 19. LÔGARIT (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được khái niệm lôgarit cơ số *a* của một số thực dương.
- Giải thích được các tính chất của phép tính lôgarit nhờ sử dụng định nghĩa hoặc các tính chất đã biết trước đó.
- Sử dụng được tính chất của phép tính lôgarit trong tính toán các biểu thức số và rút gọn các biểu thức chứa biến.
- Tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) của lôgarit bằng cách sử dụng máy tính cầm tay.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với phép tính lôgarit.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua những bài toán thực tiễn liên quan đến khái niệm lôgarit.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày khái niệm lôgarit ở đây và SGK Toán THPT trước đây. Tuy nhiên, theo tinh thần của chương trình mới, chúng tôi nhấn mạnh đến ứng dụng của lôgarit trong các bài toán thực tế và giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán liên quan đến khái niệm lôgarit. Nói riêng, để giảm bớt tính hàn lâm theo tinh thần của chương trình mới và cũng như SGK Toán của các nước phát triển, chúng tôi không đưa vào sách một số công thức có tính chất thủ thuật biến đổi để giải toán liên quan đến lôgarit. Khi cần HS có thể dễ dàng tự suy ra những công thức này từ các công thức cơ bản được trình bày trong sách.
- Trong phần Em có biết? ở cuối bài, SGK giới thiệu ngắn gọn lịch sử phát triển của các khái niệm luỹ thừa và lôgarit. GV có thể hướng dẫn HS tự đọc để tìm hiểu vấn đề này.
- Chuẩn bị:

  + GV: Tìm hiểu lịch sử ra đời và một số ứng dụng thực tế của khái niệm lôgarit.

  + HS: Chuẩn bị máy tính cầm tay để tính toán với lôgarit.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.

+ Tiết 1: Mục 1. Khái niệm lôgarit;
Mục 2. Tính chất của lôgarit.
+ Tiết 2: Mục 3. Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên;
Gợi ý chữa một số bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chứ chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.

1. KHÁI NIỆM LÔGARIT		
HĐ1. Nhận biết khái niệm lôgarit	Giới thiệu định nghĩa, điều kiện có nghĩa và những tính chất đơn giản của lôgarit.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. Lưu ý nhấn mạnh cho HS phép lấy lôgarit và phép nâng luỹ thừa là hai phép toán ngược nhau.
Ví dụ 1	Rèn luyện cho HS kĩ năng tính lôgarit bằng định nghĩa (khi biểu thức dưới dấu lôgarit là luỹ thừa của cơ số).	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tính lôgarit bằng định nghĩa, tình huống tương tự Ví dụ 1.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý.* a) $\log_3 3\sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$. b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = -5$.
2. TÍNH CHẤT CỦA LÔGARIT		
a) Quy tắc tính lôgarit		
HĐ2. Nhận biết quy tắc tính lôgarit	Giới thiệu các quy tắc tính lôgarit của tích, thương, luỹ thừa.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. Lưu ý cho HS cách ghi nhớ các quy tắc tính lôgarit quan trọng này.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng vận dụng các quy tắc tính lôgarit.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng vận dụng các quy tắc tính lôgarit.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý.* $A = \log_2 x$.
b) Đổi cơ số của lôgarit		
HĐ3. Xây dựng công thức đổi cơ số của lôgarit	Hướng dẫn HS từng bước để xây dựng công thức đổi cơ số của lôgarit.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.

		Lưu ý cho HS ý nghĩa quan trọng của công thức đổi cơ số.
Ví dụ 3	Rèn luyện kĩ năng tính lôgarit bằng cách đổi cơ số trong trường hợp đơn giản	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 4	Giới thiệu hai tính chất thường dùng trong giải toán, liên quan đến công thức đổi cơ số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng tính lôgarit bằng cách đổi cơ số trong trường hợp đơn giản	HS tự làm tại lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN		
a) Lôgarit thập phân		
Khái niệm lôgarit thập phân	Giới thiệu định nghĩa và kí hiệu của lôgarit thập phân.	GV trình bày định nghĩa và kí hiệu của lôgarit thập phân.
Ví dụ 5	Giới thiệu ứng dụng của lôgarit thập phân trong một vấn đề thực tế.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
b) Số e và lôgarit tự nhiên		
Bài toán lãi kép liên tục và số *e*	Giới thiệu khái niệm lãi kép liên tục và số *e*.	GV phân tích, giảng giải cho HS.
Khái niệm lôgarit tự nhiên	Giới thiệu định nghĩa và kí hiệu của lôgarit tự nhiên.	GV trình bày định nghĩa và kí hiệu của lôgarit tự nhiên (tức là lôgarit cơ số *e*).

Ví dụ 6	Giới thiệu ứng dụng của lôgarit tự nhiên trong một vấn đề thực tiễn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
c) Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay		
Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay	Hướng dẫn HS cách tính lôgarit của một số dương bằng máy tính cầm tay.	HS thực hành dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 7	Sử dụng cách tính lôgarit trong một tình huống thực tế.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Vận dụng	Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học, vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài học để giải quyết.	*Gợi ý*. a) Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng là $100\cdot(1+6\%)=106$ (triệu đồng). Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép kì hạn 1 tháng là $100\left(1+\frac{6\%}{12}\right)^{12}\approx 106{,}17$ (triệu đồng). Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép liên tục là $100\cdot e^{6\%\cdot 1}\approx 106{,}18$ (triệu đồng). b) Gọi t (năm) là thời gian gửi cần thiết. Ta có: $150=100\cdot e^{0{,}06t}$. Suy ra $0{,}06t=\ln 1{,}5$ hay $t\approx 6{,}76$ năm.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Tính lôgarit: Bài tập 6.9.
- Biến đổi, rút gọn, tính giá trị của các biểu thức chứa lôgarit: Các Bài tập 6.10, 6.11, 6.12.

– Ứng dụng thực tế của lôgarit: Các Bài tập 6.13, 6.14.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong Sách bài tập và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

6.9. a) -13; b) $\sqrt{2}$;

c) $\log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 \frac{16}{2} = \log_8 8 = 1$;

d) $\log_2 6 \cdot \log_6 8 = \log_2 6 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 6} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

6.10. a) $A = \ln \frac{x(x+1)}{(x-1)x\left(x^2-1\right)} = \ln \frac{x(x+1)}{(x-1)x(x-1)(x-1)} = \ln \frac{1}{(x-1)^2} = -\ln(x-1)^2$.

b) $B = \log_3 x^7 + \log_3\left(9x^2\right) - \log_3 9 = \log_3 \frac{x^7 \cdot 9x^2}{9} = \log_3 x^9 = 9\log_3 x$.

6.11. a) $A = \log_{3^{-1}} 5 + 2\log_{3^2} 5^2 - 2\log_3 5^{-1} = -\log_3 5 + 2\log_3 5 + 2\log_3 5 = 3\log_3 5$.

b) $B = 2\log_a M + \frac{1}{2} \cdot 4\log_a M = 4\log_a M$.

6.12. a) Áp dụng công thức đổi cơ số, ta có:

$$A = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 6}{\log 5} \cdot \frac{\log 7}{\log 6} \cdot \frac{\log 8}{\log 7} = \frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8 = 3.$$

b) $B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdots \log_2 2^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$.

6.13. Ta có: $15\,500(5 - \log p) = 8\,850 \Leftrightarrow \log p \approx 4,43$.

Áp suất không khí ở đỉnh Everest là $p \approx 10^{4,43} \approx 26\,915,35$ Pa.

6.14. a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện có cường độ $I = 10^{-7}$ W/m^2 là

$$10 \cdot \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^5 = 50 \text{ (dB)}.$$

b) Mức cường độ âm của giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3}$ W/m^2 là

$$10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^9 = 90 \text{ (dB)}.$$

Bài 20. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được hàm số mũ và hàm số lôgarit. Nêu được một số ví dụ thực tế về hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- Nhận dạng được đồ thị của các hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- Giải thích được các tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit thông qua đồ thị của chúng.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với hàm số mũ và hàm số lôgarit.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua những bài toán thực tiễn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, một điểm khác biệt lớn về cách trình bày hàm số mũ và hàm số lôgarit ở đây so với SGK Toán THPT trước đây là do ở đây ta chưa có công cụ đạo hàm để khảo sát hàm số nên sự biến thiên của hàm số mũ và hàm số lôgarit được suy ra từ đồ thị của chúng (mà đồ thị nhận được từ việc ta vẽ phác thảo dựa vào một số điểm của nó, chứ không khảo sát hàm số một cách chặt chẽ như ở SGK Toán THPT trước đây). Điều này là do quan điểm giảm tính hàn lâm và do quy định về bố trí thứ tự các nội dung (phần nội dung hàm số mũ và hàm số lôgarit trình bày trước nội dung về đạo hàm) trong chương trình mới.

  Cũng do tinh thần giảm tính hàn lâm của chương trình, SGK cũng không trình bày mối quan hệ giữa đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit cùng cơ số trong trường hợp tổng quát (hai đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất).

  GV cần lưu ý những điều này khi giảng dạy.
- Chuẩn bị:
  + GV: Tìm hiểu một số mô hình thực tế liên quan đến ứng dụng của hàm số mũ và hàm số lôgarit.
  + HS: Ôn lại khái niệm hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến và đặc trưng đồ thị của chúng đã học ở lớp 10.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 1 tiết.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chứ chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. HÀM SỐ MŨ		
HĐ1. Nhận biết hàm số mũ	Giới thiệu khái niệm hàm số mũ.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. Câu hỏi giúp HS nhận dạng hàm số mũ.
HĐ2. Nhận dạng đồ thị và tính chất của hàm số mũ	Giới thiệu dạng đồ thị và tính chất cơ bản của hàm số mũ.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 1	Rèn luyện cho HS kĩ năng vẽ đồ thị của hàm số mũ.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập	Củng cố kĩ năng vẽ đồ thị của hàm số mũ.	HS tự làm tại lớp.
2. HÀM SỐ LÔGARIT		
HĐ3. Nhận biết hàm số lôgarit	Giới thiệu khái niệm hàm số lôgarit.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3. Câu hỏi giúp HS nhận dạng hàm số lôgarit.
HĐ4. Nhận dạng đồ thị và tính chất của hàm số lôgarit	Giới thiệu dạng đồ thị và tính chất cơ bản của hàm số lôgarit.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ4. GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.
Ví dụ 2	Rèn luyện cho HS kĩ năng vẽ đồ thị của hàm số lôgarit.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

Vận dụng	Vận dụng kiến thức hàm số mũ vào bài toán thực tiễn trong tình huống mở đầu.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*. Từ năm 2020 tới năm 2050 là 30 năm. Ước tính dân số Việt Nam vào năm 2050 là $97,34 \cdot e^{0,91\% \cdot 30} \approx 127,9$ (triệu người).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

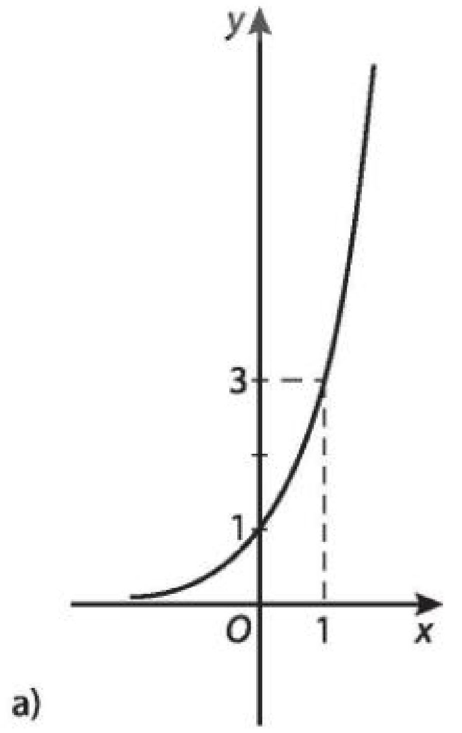
- Vẽ đồ thị của hàm số mũ: Bài tập 6.15.
- Vẽ đồ thị của hàm số lôgarit: Bài tập 6.16.
- Tìm tập xác định của hàm số lôgarit: Bài tập 6.17.
- Ứng dụng thực tế của hàm số mũ và hàm số lôgarit: Các Bài tập 6.18, 6.19.

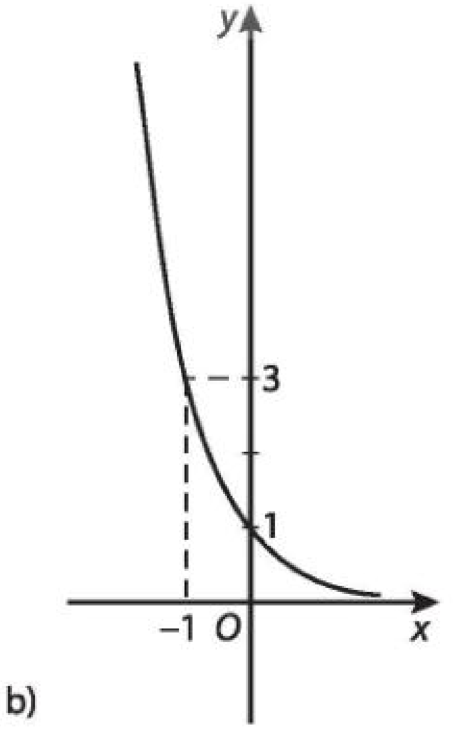
Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

6.15. Đồ thị của các hàm số sau:

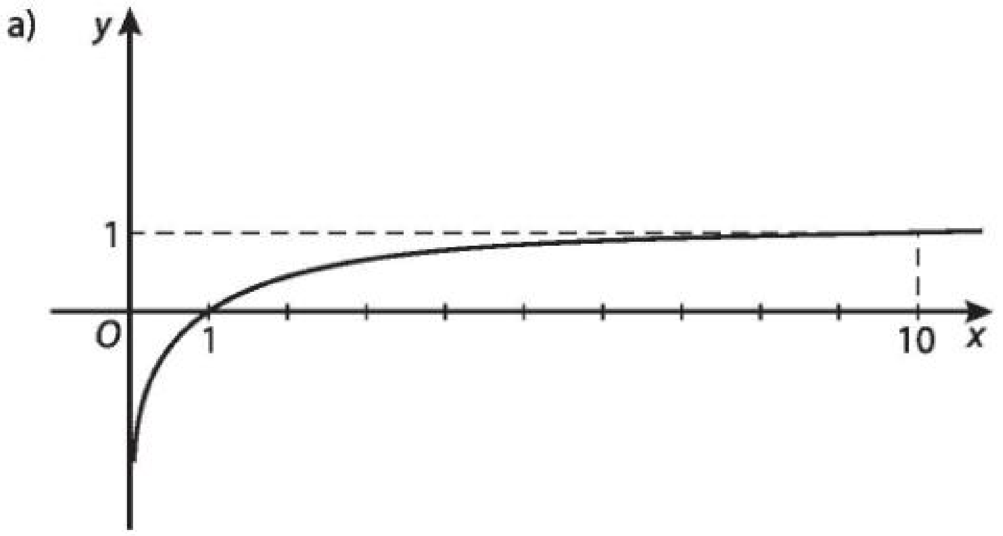
a) $y = 3^x$;   b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

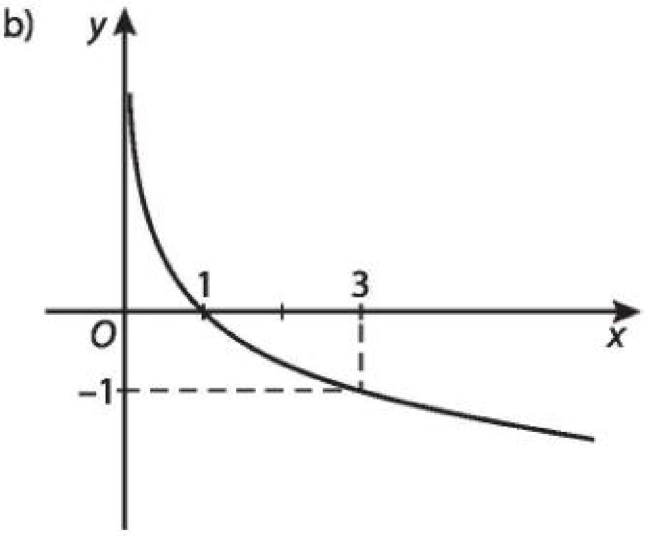




6.16. Đồ thị của các hàm số:

a) $y = \log x$; b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.





6.17. a) Điều kiện xác định: $|x+3| > 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

b) Điều kiện xác định: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2; 2)$.

6.18. a) Khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$ là

$$m(0) = 13 \cdot e^0 = 13 \text{ (kg)}.$$

b) Khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 45$ ngày là

$$m(45) = 13 \cdot e^{-0{,}015 \cdot 45} \approx 6{,}62 \text{ (kg)}.$$

6.19. Khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là

$$M = 75 - 20\ln(6+1) = 75 - 20\ln 7 \approx 36\%.$$

Bài 21. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Giải được phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit ở dạng đơn giản.
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiễn gắn với phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua những bài toán thực tiễn liên quan đến phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Do tinh thần giảm tính hàn lâm của chương trình, yêu cầu về việc giải các phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit được giảm nhẹ rất nhiều. Chỉ yêu cầu HS giải những phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit rất đơn giản. Tuy nhiên, SGK nhấn mạnh đến ứng dụng của chúng trong các bài toán thực tiễn.
- Chuẩn bị:
  + GV: Tìm hiểu một số bài toán thực tế liên quan đến việc giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.
  + HS: Ôn lại điều kiện xác định, các công thức biến đổi, các tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.
  + Tiết 1: Mục 1. Phương trình mũ;
    Mục 2. Phương trình lôgarit.
  + Tiết 2: Mục 3. Bất phương trình mũ;
    Mục 4. Bất phương trình lôgarit.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chứ chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.

1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ		
HĐ1. Nhận biết nghiệm của phương trình mũ	Giới thiệu khái niệm và phương pháp giải phương trình mũ cơ bản.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. Minh hoạ kết quả bằng đồ thị.
Ví dụ 1	Rèn luyện cho HS kĩ năng giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 2	Rèn luyện cho HS kĩ năng giải phương trình mũ bằng phương pháp lôgarit hoá.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng giải phương trình mũ đơn giản.	HS tự làm tại lớp.
2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT		
HĐ2. Nhận biết nghiệm của phương trình lôgarit	Giới thiệu khái niệm và phương pháp giải phương trình lôgarit cơ bản.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. Minh hoạ kết quả bằng đồ thị.
Ví dụ 3	Rèn luyện cho HS kĩ năng giải phương trình lôgarit bằng phương pháp mũ hoá.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 4	Rèn luyện cho HS kĩ năng giải phương trình lôgarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng giải phương trình lôgarit đơn giản.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý* a) Điều kiện $x < 3$. Phương trình đã cho trở thành $4 - \log(3 - x) = 3 \Leftrightarrow \log(3 - x) = 1$ $\Leftrightarrow 3 - x = 10 \Leftrightarrow x = -7$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -7$.

		b) Điều kiện: $x > 1$. Phương trình đã cho trở thành: $\log_2(x+2)(x-1) = 1 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 2$. Thu gọn ta được phương trình bậc hai $x^2 + x - 4 = 0$. Từ đó ta được $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ hoặc $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$. Kết hợp với điều kiện, ta kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ		
HĐ3. Nhận biết nghiệm của bất phương trình mũ	Giới thiệu khái niệm và phương pháp giải bất phương trình mũ cơ bản.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ3. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức và Chú ý.
Ví dụ 5	Rèn luyện cho HS kĩ năng giải bất phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 6	Áp dụng cách giải bất phương trình mũ trong một tình huống thực tiễn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng giải bất phương trình mũ.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý* a) $0{,}1^{2x-1} \le 0{,}1^{2-x} \Leftrightarrow 2x - 1 \ge 2 - x \Leftrightarrow x \ge 1$. b) $3 \cdot 2^{x+1} \le 1 \Leftrightarrow 2^{x+1} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow x + 1 \le \log_2 \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow x \le -\log_2 3 - 1$.

4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT		
HĐ4. Nhận biết nghiệm của bất phương trình lôgarit	Giới thiệu khái niệm và phương pháp giải bất phương trình lôgarit cơ bản.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ4. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức và Chú ý.
Ví dụ 7	Rèn luyện kĩ năng giải bất phương trình lôgarit.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng giải bất phương trình lôgarit.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý.* a) Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right)$. b) Điều kiện: $x>\frac{-1}{2}$. Bất phương trình $2\log(2x+1)>3$ tương đương với $\log(2x+1)>\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2x+1>10^{\frac{3}{2}}$ $\Leftrightarrow x>\frac{-1+10\sqrt{10}}{2}$. Kết hợp với điều kiện, ta kết luận tập nghiệm của bất phương trình $S=\left(\frac{-1+10\sqrt{10}}{2};+\infty\right)$
Vận dụng	Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học, vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài học để giải quyết.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý.* a) Thay $h=4$ vào công thức đã cho, ta được $\ln\left(\frac{p}{100}\right)=-\frac{4}{7}$. Từ đó $\frac{p}{100}=e^{-\frac{4}{7}}\Leftrightarrow p=100e^{-\frac{4}{7}}\approx 56,47$ (kPa). b) Khi ở độ cao trên 10 km thì $h>10$, do đó $\ln\frac{p}{100}=-\frac{h}{7}<-\frac{10}{7}$ $\Leftrightarrow 0<p<100e^{\frac{-10}{7}}\approx 23,97$ (kPa). Vậy ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ nhỏ hơn 23,97 kPa.

Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Giải phương trình mũ, lôgarit đơn giản: Các Bài tập 6.20, 6.21.
- Giải bất phương trình mũ, lôgarit đơn giản: Bài tập 6.22.
- Ứng dụng thực tế của phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit: Các Bài tập 6.23, 6.24, 6.25, 6.26.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong Sách bài tập và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

6.20. a) $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$

b) $100^{2x^2-3} = 0{,}1^{2x^2-18} \Leftrightarrow 10^{4x^2-6} = 10^{-2x^2+18} \Leftrightarrow 4x^2 - 6 = -2x^2 + 18$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

c) $\sqrt{3}e^{3x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3x = \ln\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3x = -\dfrac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}\ln 3.$

d) $5^x = 3^{2x-1} \Leftrightarrow \log_3 5^x = \log_3 3^{2x-1} \Leftrightarrow x\log_3 5 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2 - \log_3 5}.$

6.21. a) Điều kiện: $x > -1$. Ta có: $\log(x+1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99.$

b) Điều kiện: $x > 3$. Phương trình tương đương với $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$, hay

$\log_2 x(x-3) = 2 \Leftrightarrow x(x-3) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4.$

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4.$

c) Điều kiện: $x > 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$\ln x(x-1) = \ln 4x \Leftrightarrow x(x-1) = 4x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 5.$

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

d) Điều kiện: $x > 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3.$

Kết hợp với điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3.$

6.22. a) $0{,}1^{2-x} > 0{,}1^{4+2x} \Leftrightarrow 2 - x < 4 + 2x \Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{3}$.

b) $2 \cdot 5^{2x+1} \le 3 \Leftrightarrow 5^{2x+1} \le \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x + 1 \le \log_5 \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{2}\left(\log_5 \dfrac{3}{2} - 1\right)$.

c) Điều kiện: $x > -7$.

Ta có: $\log_3(x+7) \ge -1 \Leftrightarrow x + 7 \ge \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{20}{3}$.

d) Điều kiện: $x > \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\log_{0,5}(x+7) \ge \log_{0,5}(2x-1) \Leftrightarrow x + 7 \le 2x - 1 \Leftrightarrow x \ge 8$.

6.23. Số tiền bác Minh nhận được sau n năm gửi tiết kiệm là

$$A = 500 \cdot (1 + 0{,}075)^n = 500 \cdot 1{,}075^n \text{ (triệu đồng).}$$

Để có được 800 triệu đồng thì

$$A = 800 \Leftrightarrow 500 \cdot 1{,}075^n = 800 \Leftrightarrow 1{,}075^n = 1{,}6$$
$$\Leftrightarrow n = \log_{1,075} 1{,}6 \approx 6{,}5 \text{ (năm).}$$

Vậy sau khoảng 7 năm gửi tiết kiệm thì bác An thu được ít nhất 800 triệu đồng.

6.24. Số lượng vi khuẩn đạt tới 80 000 con khi

$$N(t) = 80\,000 \Leftrightarrow 500e^{0,4t} = 80\,000 \Leftrightarrow e^{0,4t} = 160$$
$$\Leftrightarrow 0{,}4t = \ln 160 \Leftrightarrow t \approx 12{,}69 \text{ (giờ).}$$

Vậy sau khoảng 12,69 giờ thì số lượng vi khuẩn đạt tới 80 000 con.

6.25. a) Nhiệt độ T_0 ban đầu của vật ứng với nhiệt độ tại thời điểm $t = 0$, từ đó ta được

$$T_0 = T(0) = 25 + 70e^{-0,5 \cdot 0} = 25 + 70 = 95\,(^\circ\text{C}).$$

b) Nhiệt độ của vật còn lại 30 °C khi t thoả mãn phương trình

$$25 + 70e^{-0,5t} = 30 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{14}$$
$$\Leftrightarrow -0{,}5t = \ln\frac{1}{14} \Leftrightarrow t = 2\ln 14 \approx 5{,}278,$$

tức là sau khoảng 5,28 phút.

6.26. Ta có: $\text{pH} = -\log[H^+] = 8$. Suy ra $[H^+] = 10^{-8}$ (mol/l). Vậy nồng độ ion hydrogen của dung dịch có độ pH là 8 là 10^{-8} (mol/l).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương.
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

6.27. B	**6.28.** A
6.29. B	**6.30.** C
6.31. A	**6.32.** C
6.33. D	**6.34.** B.

6.35. $B = \log_a\left(\dfrac{a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right) + \left(a^{\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}}\right)^2 = \log_a a^{\frac{173}{60}} + \left(\dfrac{\sqrt{105}}{30}\right)^2 = \dfrac{173}{60} + \dfrac{105}{900} = 3.$

6.36. a) Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế ta được: $1 - 2x = x\log_3 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2 + \log_3 4}$.

b) Điều kiện: $x > -1$. Ta có:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+4) = 2 \Leftrightarrow \log_3(x+1)(x+4) = 2 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 9$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 5 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai ta được $x = \dfrac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}$ và $x = \dfrac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Loại nghiệm $x = \dfrac{-5 - 3\sqrt{5}}{2} < -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}$.

6.37. a) Điều kiện xác định: $4^x - 2^{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2^x\left(2^x - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow 2^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\left[1;+\infty\right)$.

b) Điều kiện xác định: $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

Vậy tập xác định của hàm số là $(0; e)$.

6.38. a) Nếu tỉ lệ lạm phát 8% một năm thì sau 2 năm sức mua của 100 triệu đồng sẽ còn lại là $A = 100 \cdot (1 - 0{,}08)^2 = 84{,}64$ (triệu đồng).

b) Ta có: $100 \cdot (1 - r)^2 = 90 \Leftrightarrow (1 - r)^2 = \dfrac{9}{10} \Leftrightarrow 1 - r = \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow r = 1 - \dfrac{3\sqrt{10}}{10} \approx 0{,}05$ do $1 - r > 0$.

Vậy tỉ lệ lạm phát khoảng 5% một năm.

c) Với tỉ lệ lạm phát 5% một năm thì với số tiền P ban đầu sau n năm sức mua còn lại là $A = P \cdot (1 - 0{,}05)^n$. Theo giả thiết, ta có:

$$P \cdot (1 - 0{,}05)^n = \frac{P}{2} \Leftrightarrow 0{,}95^n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = \log_{0{,}95} \frac{1}{2} \approx 13{,}51.$$

Vậy với tỉ lệ lạm phát 5% một năm sau khoảng 14 năm thì sức mua chỉ còn lại một nửa.

6.39. a) Ta có: $800 = 500e^{r \cdot 1} \Leftrightarrow r = \ln 1{,}6$.

Vậy số lượng vi khuẩn sau 5 giờ là $N = N(5) = 500e^{5\ln 1{,}6} = 500 \cdot 1{,}6^5 = 5\,242{,}88$; tức là khoảng 5 242 con.

b) Ta có: $1\,000 = 500e^{t\ln 1{,}6} = 500 \cdot 1{,}6^t \Leftrightarrow 1{,}6^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1{,}6} 2 \approx 1{,}47$.

Vậy sau khoảng 1,47 giờ thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi.

6.40. a) Từ $P = \log \dfrac{d + 1}{d} = \log\left(1 + \dfrac{1}{d}\right)$ suy ra $\dfrac{1}{d} = 10^P - 1$ hay $d = \dfrac{1}{10^P - 1}$.

b) Với $P = 9{,}7\% = 0{,}097$, ta có $d = \dfrac{1}{10^{0{,}097} - 1} \approx 4$.

c) Với $d = 1$, ta có $P = \log 2 \approx 0{,}301 = 30{,}1\%$.

CHƯƠNG VII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

Tiếp nối nội dung về quan hệ song song đã được trình bày ở chương IV, chương này đề cập đến mối quan hệ vuông góc, góc, khoảng cách và thể tích. Kiến thức và kĩ năng trong chương này được sử dụng rộng rãi trong đời sống thực tế và giúp ích cho HS học tập phần Hình học lớp 12, các bậc học tiếp theo đặc biệt đối với các HS lựa chọn các khối ngành khoa học tự nhiên và kĩ thuật.

2 Cấu tạo chương

Chương VII gồm 6 bài và một tiết ôn tập, được thực hiện trong 17 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 22. Hai đường thẳng vuông góc	2 tiết
Bài 23. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	3 tiết
Bài 24. Phép chiếu vuông góc. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	2 tiết
Bài 25. Hai mặt phẳng vuông góc	4 tiết
Bài 26. Khoảng cách	3 tiết
Bài 27. Thể tích	2 tiết
Bài tập cuối chương VII	1 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Không sử dụng công cụ vectơ trong không gian để xây dựng lí thuyết ở chương này.
- Tăng cường cho HS sử dụng hiểu biết về hình học không gian để mô tả một số hình ảnh thực tế.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 22. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được góc giữa hai đường thẳng.

- Nhận biết được hai đường thẳng vuông góc.
- Chứng minh được hai đường thẳng vuông góc và tính được góc giữa hai đường thẳng trong một số tình huống đơn giản.
- Vận dụng được kiến thức về quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng để mô tả một số hình ảnh thực tế như hai con đường vuông góc với nhau, một số cấu kiện trong một ngôi nhà vuông góc với nhau,…

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke, hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (chẳng hạn, thông qua việc vận dụng tính góc giữa cạnh bên và cạnh đáy của kim tự tháp Kheops và việc xem xét mối quan hệ vuông góc giữa các cấu kiện trong một ngôi nhà gỗ truyền thống).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo báo kết quả học tập), yêu nước (chẳng hạn, với mô hình nhà gỗ, HS hiểu hơn về truyền thống văn hoá dân tộc).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Khái niệm góc giữa hai đường thẳng được quy về góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua một điểm (đồng phẳng).
- Khi xác định góc giữa hai đường thẳng, tuỳ từng tình huống cụ thể cần chọn điểm phù hợp để thuận tiện cho việc tạo các đường song song với hai đường đã cho.
- Liên quan tới Bài tập 7.4, GV có thể gợi ý HS tìm hiểu qua video trên Internet về nhà gỗ truyền thống để dễ quan sát các cấu kiện hơn.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Bài học có thời lượng 2 tiết, có thể phân bổ như sau:

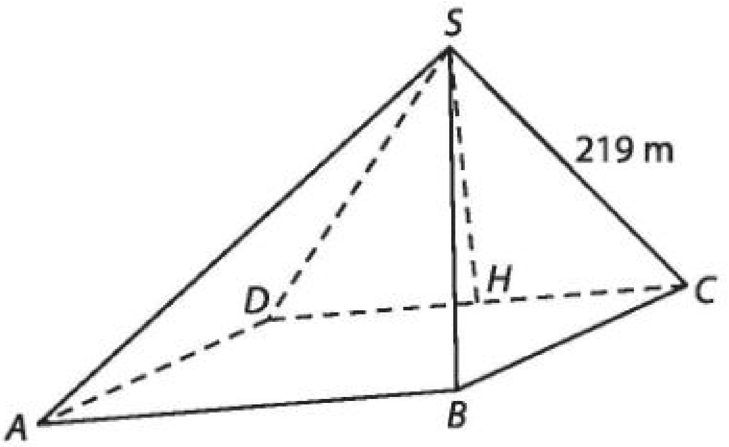
Tiết 1: Từ đầu bài học đến hết câu hỏi sau định nghĩa hai đường thẳng vuông góc.

Tiết 2: Từ Ví dụ 2 đến hết bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1. Góc giữa hai đường thẳng, hai đường thẳng vuông góc

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Mở đầu chương	Giới thiệu khái quát về chương.	Giới thiệu theo SGK. Hình vẽ đi kèm là một góc trong thư viện, chứa đựng quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (như thân cây đèn và mặt sàn, chân ghế và mặt sàn), quan hệ vuông góc giữa hai mặt phẳng (như các vách của giá sách).
Tình huống mở đầu bài học	Nêu một tình huống cần đo góc (độ mở) giữa hai đường thẳng, dù chúng cắt nhau hay chéo nhau.	GV có thể giải thích thêm về chức năng của nút giao thông không cùng mức.
1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG		
HĐ1	HS thấy định nghĩa trong khung kiến thức ngay sau không phụ thuộc vào điểm mà hai đường thẳng thay thế cùng đi qua.	GV tổ chức, giám sát, gợi ý để HS thực hiện. *Gợi ý* a) Mỗi cặp a, a' và b, b' đều có điểm chung nên đồng phẳng. b) Các tứ giác $OAA'O'$, $OBB'O'$ đều có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành. Tứ giác $ABB'A'$ có hai cạnh AA' và BB' song song với nhau và bằng nhau nên là hình bình hành. c) Từ câu b suy ra hai tam giác OAB và $O'A'B'$ có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau. Từ đó, áp dụng định lí côsin cho hai tam giác đó ta được các góc tương ứng tại O và O' cũng bằng nhau. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. *Lưu ý*. Ở đây ta tạm thời tránh dùng hai tam giác bằng nhau khi chúng chưa cùng thuộc một mặt phẳng. Tuy vậy, sau cách làm trên, GV có thể bình luận để HS thấy rằng: Nếu dùng các định lí côsin, sin ta có thể mở rộng

		các trường hợp bằng nhau của tam giác từ mặt phẳng sang không gian.
Khung kiến thức	Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng.	– GV giảng giải cho HS. – GV bình luận cho HS rằng ta chuyển khái niệm góc giữa hai đường thẳng bất kì thành góc giữa hai đường thẳng thuộc cùng một mặt phẳng (đã biết) và HĐ1 chỉ ra rằng góc đó không phụ thuộc vào điểm mà hai đường thẳng thay thế cùng đi qua.
Chú ý	Chỉ ra trường hợp hay gặp.	GV giải thích để HS thấy ưu điểm của tình huống này là chỉ cần kẻ một đường song song.
Ví dụ 1	HS học kĩ năng nhận biết và tính góc giữa hai đường thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS. GV nhấn mạnh để HS thấy trong từng trường hợp cụ thể, cần tìm điểm phù hợp để từ đó có thể kẻ các đường tương ứng song song với các đường đang xét.
Vận dụng	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết và tính góc giữa hai đường thẳng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS làm bài. – GV có thể gợi ý HS: + Vẽ hình chóp tương ứng với mô hình; + Xác định được trên hình góc cần tính; + Dùng định lí côsin và máy tính cầm tay để tính (gần đúng) góc. *Gợi ý.* Gọi H là trung điểm của CD thì $CH = 115$ m. Vì $DC // AB$ nên $(SC; AB) = (SC; CD) = \widehat{SCH}$. Ta có: $\cos\widehat{SCH} = \dfrac{CH}{SC} = \dfrac{115}{219} \Rightarrow \widehat{SCH} \approx 58,3°$. 

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC		
HĐ2	Tạo hai đường thẳng vuông góc với nhau trong không gian.	– GV tổ chức, giám sát, gợi ý để HS làm. – GV có thể cho HS nhắc lại định nghĩa góc giữa hai đường thẳng từ đó để thấy rằng nếu các đường thẳng a, a' tương ứng song song với các đường thẳng b, b' thì $(a, b) = (a', b')$. *Gợi ý*. Vì khuôn cửa và hai cánh cửa là các hình chữ nhật nên $BC \mathbin{/\mkern-6mu/} MQ$ và $(BC, MN) = (MQ, MN) = 90^{\circ}$.
Khung kiến thức	Khái niệm hai đường thẳng vuông góc trong không gian.	GV trình bày cho HS.
Tổng kết tiết học	HS nhìn lại các nội dung chính đã học. Dặn dò, nhắc nhở HS.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2. Ví dụ, Luyện tập, Bài tập

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Ví dụ 2	HS học kĩ năng nhận biết và tính góc giữa hai đường thẳng, nhận biết hai đường thẳng vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết góc giữa hai đường thẳng và hai đường thẳng vuông góc với nhau.	GV tổ chức để HS thực hiện. *Gợi ý*. Vì $AD \mathbin{/\mkern-6mu/} NP$, $BC \mathbin{/\mkern-6mu/} MN$ và $(MN, NP) = 90^{\circ}$ nên $(AD, BC) = 90^{\circ} \Rightarrow AD \perp BC$. Nếu $D \in (ABC)$ thì $A \in (MNP)$ (vô lí). Vậy $D \notin (ABC)$ nên AD, BC chéo nhau.
Kiểm tra, chữa bài tập	HS luyện kiến thức, kĩ năng đã học.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS.

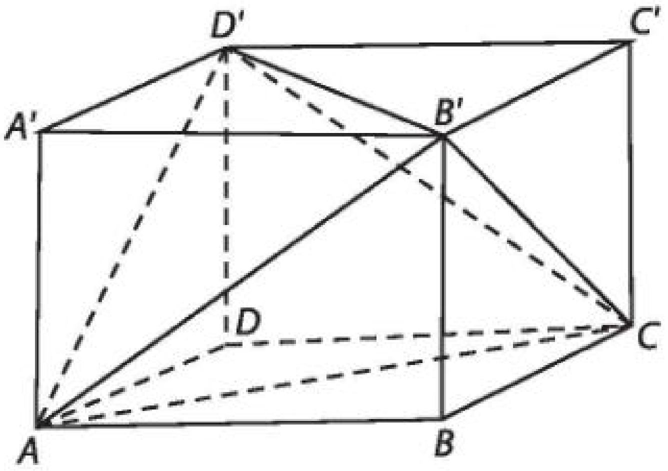
3. Phân loại bài tập

- Tính góc giữa hai đường thẳng: Bài 7.1.
- Nhận biết hai đường thẳng vuông góc: Các Bài tập 7.2, 7.3, 7.4.

VI. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

7.1. $(AB, B'C') = (AB, BC) = 60°$.

7.2. (H.7.1) Vì $ABB'A'$ là hình thoi nên $AB' \perp A'B$, mà $A'B \parallel CD' \Rightarrow AB' \perp CD'$. Tương tự cho các cặp còn lại.



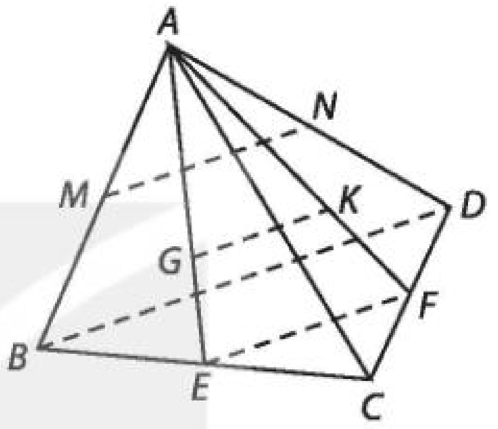
Hình 7.1

7.3. (H.7.2)

a) Vì $MN \parallel BD, BD \perp BC \Rightarrow MN \perp BC$.

b) $GK \parallel EF, EF \parallel BD \Rightarrow GK \parallel BD, BD \perp BC$

$\Rightarrow GK \perp BC$.



Hình 7.2

7.4. Những cặp đường thẳng sau vuông góc với nhau: hoành (1) và quá giang (2); hoành (1) và rui (4); hoành (1) và cột (5); quá giang (2) và xà cái (3); quá giang (2) và cột (5); xà cái (3) và rui (4); xà cái (3) và cột (5).

Bài 23. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- Nhận biết được điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- Giải thích được mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.
- Vận dụng kiến thức về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để mô tả một số hình ảnh thực tế như phương thẳng đứng và mặt phẳng nằm ngang tại một điểm, cách tạo cột treo quần áo vuông góc với mặt sàn,…

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).

– Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).

– Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (thước kẻ, ê ke hoặc phần mềm vẽ hình).

– Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).

– Năng lực mô hình hoá toán học (chẳng hạn, thông qua việc vận dụng hiểu biết về quan hệ vuông góc để tạo cột treo quần áo vuông góc với sàn nhà, diễn đạt mặt phẳng nằm ngang tại một điểm).

– Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo báo kết quả học tập, kiểm tra cột vuông góc với sàn).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

Không yêu cầu HS chứng minh điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng mà chỉ cho HS hoạt động để có trải nghiệm về điều kiện đó.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Bài học có thời lượng 3 tiết, có thể phân bổ như sau:

Tiết 1. Mục 1: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Tiết 2. Mục 2: Tính chất.

Tiết 3. Mục 3 và chữa Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu bài học	Đề cập một tình huống thực tế ứng với quan hệ vuông góc và không vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV giới thiệu như SGK. *Chú ý*. Quan sát trên thực địa, đôi khi ta có thể cảm nhận được công trình có phương vuông góc hay không vuông góc với mặt đất (phẳng). Nếu mặt đất ở đó có phương nằm ngang mà công trình có phương không vuông góc với mặt đất thì ta nói công trình là nghiêng (HS sẽ được tìm hiểu điều này ở mục Em có biết? cuối bài học).

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG		
HĐ1	Ví dụ thực tế về đường thẳng vuông góc với mọi đường thẳng trong một mặt phẳng.	– GV tổ chức, giám sát, gợi ý để HS thực hiện. – GV có thể gợi ý HS: + Trong quá trình đóng – mở cánh cửa, đường thẳng AB (đi qua hai bản lề) có thay đổi hay không? + Trong quá trình đóng – mở cánh cửa, đường thẳng BC thay đổi như thế nào và góc giữa BC và AB bằng bao nhiêu? *Gợi ý* a) Trong quá trình đóng – mở cánh cửa, đường thẳng AB cố định vì luôn đi qua hai bản lề cố định, đường thẳng BC trên mặt sàn và luôn đi qua điểm B cố định (là giao của đường thẳng AB và mặt sàn). Vì đường thẳng BC quay quanh điểm B và $(AB, BC) = 90^\circ$ nên AB vuông góc với các đường thẳng trên mặt sàn và đi qua B. b) Lấy đường thẳng a bất kì trên mặt sàn. Xét a' là đường thẳng trên mặt sàn, đi qua B và song song với a. Khi đó $(AB,a) = (AB,a') = 90^\circ$.
Khung kiến thức	Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Nêu các cách thể hiện quan hệ vuông góc.	GV trình bày cho HS.
?	HS hiểu hơn về quan hệ vuông góc.	GV gọi HS trả lời. *Gợi ý*. Cắt nhau. Vì nếu trái lại thì Δ song song hoặc nằm trên (P), khi đó, có đường thẳng a thuộc (P) và song song với Δ. Do đó, $(\Delta, a) = 0^\circ$, điều này mâu thuẫn với giả thiết Δ vuông góc với (P).

HĐ2	HS trải nghiệm để đi đến điều kiện đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) AB vuông góc với hai đường thẳng AD và AN (vì $ABCD$, $ABMN$ là các hình chữ nhật). b) Trong mô hình, đặt ê ke như mô tả trong hình vẽ ta thấy một cạnh của ê ke trùng với AB và một cạnh thuộc a nên AB vuông góc với a. – GV nên yêu cầu nhiều HS báo cáo kết quả kiểm tra trên mô hình để nhận được cùng kết luận từ nhiều kiểm nghiệm độc lập. – GV có thể nhấn mạnh thêm với HS là: trong HĐ2 ta đã biết nếu AB vuông góc với mọi đường thẳng thuộc mặt bàn và đi qua A thì AB vuông góc với mặt bàn.
Khung kiến thức	Điều kiện đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
❓	HS vận dụng trực tiếp khung kiến thức.	GV yêu cầu HS trả lời. *Gợi ý*. Vì đường thẳng vuông góc với hai cạnh của tam giác nên vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác và do đó vuông góc với cạnh thứ ba.
Ví dụ 1	HS học kĩ năng nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Vì $SA = SC$, $SB = SD$ và O là giao điểm hai đường chéo AC, BD nên O là trung điểm của AC, $BD \Rightarrow SO \perp AC$, $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.
Vận dụng	Vận dụng thực tế của điều kiện đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Vì cột treo vuông góc với hai thanh đế (cắt nhau) nên cột vuông góc với sàn nhà (chứa hai thanh đế).
Tổng kết tiết học	HS nhìn lại các nội dung chính đã học.	GV chốt kiến thức cho HS. GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2. Tính chất

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. TÍNH CHẤT		
HĐ3	Chỉ ra sự tồn tại của mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. (P) là mặt phẳng sinh bởi d và a, (Q) là mặt phẳng sinh bởi d và b. Do (P) và (Q) phân biệt nên a và b phân biệt. Do d vuông góc với a, b và Δ song song với d nên $(\Delta,a)=(d,a)=90^{\circ}$ và $(\Delta,b)=(d,b)=90^{\circ}$. Vậy Δ vuông góc với a và b. Do đó, Δ vuông góc với mặt phẳng chứa a, b.
Khung kiến thức	Định lí về sự tồn tại duy nhất mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.	– GV trình bày, giảng giải cho HS. – GV có thể lưu ý cho HS là HĐ3 chỉ chứng minh sự tồn tại, HS hoàn toàn có thể chứng minh tính duy nhất nhưng ở đây ta thừa nhận.
Nhận xét	Nêu một tiêu chuẩn kiểm tra đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng gắn với quan hệ vuông góc.	– GV yêu cầu HS giải thích hoặc GV giải thích cho HS: Các mặt phẳng mp(a, b) và mp(b, c) cùng đi qua O và cùng vuông góc với Δ nên hai mặt phẳng này trùng nhau và chính là mặt phẳng qua O và vuông với Δ. Từ đó ta nhận được nhận xét. – GV lưu ý cho HS rằng nhận xét cũng có nghĩa là các đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ thì cùng thuộc mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.
Ví dụ 2	Vận dụng kiến thức.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Giới thiệu mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
HĐ4	Chỉ ra sự tồn tại đường thẳng đi qua một điểm và vuông	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) (α) vuông góc với a nên có điểm chung với a,

	góc với một mặt phẳng cho trước.	do đó, (α) có điểm chung với (*P*). Mặt khác, (α) không trùng với (*P*) vì (α) vuông góc với *a* và *a* nằm trong (*P*). Vậy (α) và (*P*) cắt nhau theo một giao tuyến *n*. Tương tự, (β) và (*P*) cũng cắt nhau theo một giao tuyến *m* (HS có thể công nhận điều này như đã thể hiện trên hình vẽ). Do $m \perp b, n \perp a$ và *a*, *b* cắt nhau nên *m*, *n* cũng cắt nhau suy ra chúng phân biệt. Do đó, (α) và (β) không thể trùng nhau. Mặt khác, (α) và (β) có điểm chung *O* nên chúng cắt nhau theo một đường thẳng Δ đi qua *O*. b) Vì (α) và (β) đều đi qua *O* nên giao tuyến Δ của chúng đi qua *O*. Hơn nữa, *a*, *b* tương ứng vuông góc với (α) và (β) nên chúng vuông góc với Δ. Do Δ vuông với *a*, *b* nên Δ vuông góc với (*P*).
Khung kiến thức	Sự tồn tại duy nhất đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với mặt phẳng cho trước.	GV trình bày, giảng giải cho HS. *Lưu ý*. Nhờ tính chất này, ta có thể xây dựng phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng.
Luyện tập 2	HS vận dụng khung kiến thức.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Các đường thẳng *AB*, *AC* cùng vuông góc với mặt phẳng (*P*). Mặt khác, qua điểm *A* có duy nhất đường thẳng vuông góc với (*P*). Do đó hai đường thẳng *AB*, *AC* trùng nhau. Vậy *A*, *B*, *C* thẳng hàng.
Ví dụ 3	Vận dụng khung kiến thức để chỉ ra sự tồn tại duy nhất hình chiếu vuông góc của một điểm lên một mặt phẳng.	GV trình bày và giảng giải cho HS.

Tiết 3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG		
HĐ5	Nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ để HS thực hiện. *Gợi ý*. Vì a vuông góc với (P) nên $(a, m) = 90^\circ$. Mặt khác $b \parallel a$ nên $(b, m) = (a, m) = 90^\circ$. Do b vuông góc với mọi đường thẳng trong (P) nên b vuông góc với (P).
HĐ6	Nhận biết hai đường thẳng song song.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Gọi m là đường thẳng bất kì thuộc (P). Khi đó, do $c \parallel b$ và $b \perp (P)$ nên $(c,m) = (b,m) = 90^\circ$. Vậy c vuông góc với (P). Do a và c đi qua O và cùng vuông góc (P) nên chúng trùng nhau. b) Do b và c song song với nhau mà a trùng với c nên a và b song song với nhau.
Khung kiến thức	Mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 4	HS học kĩ năng nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
HĐ7	Nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Do Δ vuông góc với (P) và $a \parallel b$ nên $(\Delta, b) = (\Delta, a) = 90^\circ$. Do Δ vuông góc với mọi đường thẳng b trong (Q) nên Δ vuông góc với (Q).
HĐ8	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết hai mặt phẳng song song nhờ quan hệ vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Vì Δ vuông góc với (Q) mà (Q) song song với (R) nên theo HĐ7, Δ cũng vuông góc với (R).

		Do hai mặt phẳng (P) và (R) cùng qua O và cùng vuông góc với Δ nên chúng trùng nhau (theo tính chất). b) Mặt khác, (Q) song song với (R) nên (P) song song với (Q).
Khung kiến thức	Mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 5	HS chứng minh được vuông góc dựa vào quan hệ song song và quan hệ vuông góc.	GV tổ chức, giảng giải cho HS.
Luyện tập 3	HS nhận biết được hai mặt phẳng song song nhờ vào quan hệ vuông góc.	*Gợi ý*. Hai mặt phẳng đó song song vì hai mặt phẳng đó phân biệt và cùng vuông góc với một đường thẳng, đường thẳng đó là đường thẳng chứa một trong các chân bàn.
HĐ9	Nhận biết quan hệ vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Vì a song song với (P) nên a song song với một đường thẳng b trong (P). Mặt khác Δ vuông góc với (P) nên $(\Delta, a) = (\Delta, b) = 90^{\circ}$.
HĐ10	Nhận biết quan hệ song song từ quan hệ vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. a) Do $a \mathbin{//} a'$ và $\Delta \perp a$ nên $\Delta \perp a'$. Đường thẳng a' đi qua O và vuông góc với Δ nên a' thuộc mặt phẳng (P) (đi qua O và vuông góc với Δ). b) Vì a song song với đường thẳng a' trong (P) nên a thuộc (P) hoặc song song với (P).
Ví dụ 6	Vận dụng khung kiến thức nhận biết hai đường thẳng vuông góc với nhau.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 4	Vận dụng khung kiến thức nhận biết quan hệ song song và quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.

3. Phân loại bài tập

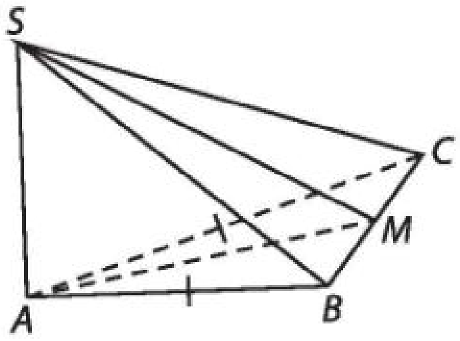
- Nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng: Các Bài tập 7.5, 7.6, 7.7.
- Dùng mối quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để mô tả một số hình ảnh thực tế: Các Bài tập 7.8, 7.9.

VI. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

7.5. (H.7.3)

a) Vì $BC \perp AM, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

b) Có $BC \perp SM$, M là trung điểm của BC nên ΔSBC cân tại S.



Hình 7.3

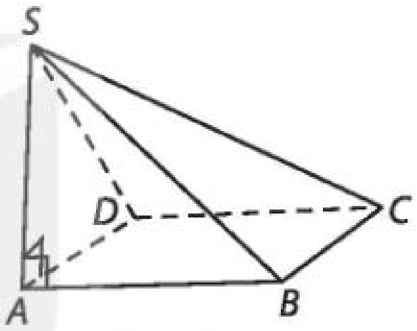
7.6. (H.7.4)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD, SA \perp BC, SA \perp CD$.

Mặt khác $BC \perp AB, CD \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow BC \perp SB, CD \perp SD$.

Vậy các mặt bên SAD, SDC, SBC, SAB là các tam giác vuông.



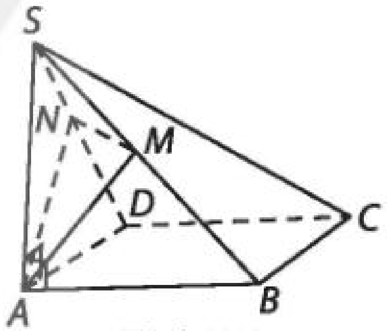
Hình 7.4

7.7. (H.7.5) Vì $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AM$, mà $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

Tương tự $AN \perp (SCD)$.

Ta có $AM \perp SC, AN \perp SC \Rightarrow SC \perp (AMN)$.



Hình 7.5

7.8. Quả dọi vuông góc với mặt phẳng nước.

7.9. Đo chính xác thì cột không vuông góc với mặt sân vì nếu vuông góc với mặt sân thì theo định lí Pythagore, cạnh huyền phải bằng $\sqrt{2}$ m, không phải 1,5 m.

Bài 24. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC.
GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được phép chiếu vuông góc.
- Xác định được hình chiếu vuông góc của một điểm, một đường thẳng, một tam giác.
- Giải thích được định lí ba đường thẳng vuông góc.

- Nhận biết và tính được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong một số trường hợp đơn giản.
- Vận dụng được kiến thức về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng để mô tả một số hình ảnh thực tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (thước kẻ hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (chẳng hạn, thông qua việc giải thích hình chiếu vuông góc của trục quay Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo có phương không đổi, mô tả góc cất cánh của máy bay, góc giữa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Vòng Bắc cực là vĩ tuyến $66^{o}33'38''$ Bắc, Vòng Nam cực là vĩ tuyến $66^{o}33'38''$ Nam (các tính toán trong SGK, ta làm tròn $66^{o}33'38''$ bởi $66{,}6^{o}$).
- Có thể chuẩn bị dây dọi để xác định phương vuông góc với mặt phẳng nằm ngang ở hoạt động trải nghiệm.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Bài học có thời lượng 2 tiết, có thể phân bổ như sau:

Tiết 1: Từ đầu bài học đến hết Nhận xét ở Mục 2.

Tiết 2: Từ Ví dụ 2 đến hết bài học, chữa Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1. Phép chiếu vuông góc. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu bài học	Nêu một hiện tượng mà để giải thích nó, ta cần tới góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV trình bày cho HS theo SGK. *Lưu ý*. Hiện tượng này được giải thích trong mục Em có biết? ở cuối bài học.

1. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC		
HĐ1	Dẫn tới phép chiếu vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Phép chiếu song song theo phương tia sáng mặt trời lên mặt sân. b) Khi tia sáng mặt trời vuông góc với mặt sân thì hình chiếu của cột thu về chân cột nên ta không thể quan sát.
Khung kiến thức	Định nghĩa phép chiếu vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Giúp HS hiểu hơn về khung kiến thức	GV trình bày, giảng giải cho HS.
❓	Giúp HS hiểu hơn về khung kiến thức.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý.* a) Đường thẳng AA' vuông góc với mặt phẳng chiếu. b) Trong trường hợp này, hình chiếu vuông góc của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) là một điểm chính là giao điểm của a và (P).
HĐ2	Dẫn tới định lí ba đường vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, gợi ý để HS thực hiện. *Gợi ý* a) Hình chiếu vuông góc của a trên (P) là đường thẳng $M'N'$. b), c) Vì hai đường thẳng a và $M'N'$ cùng thuộc một mặt phẳng (Q) và b vuông góc với đường thẳng MM' thuộc mặt phẳng đó nên b vuông góc với $a \Leftrightarrow b$ vuông góc với $(Q) \Leftrightarrow b$ vuông góc với $M'N'$. *Lưu ý.* HS có thể làm theo 2 chiều điều kiện cần và đủ.
Khung kiến thức	Định lí ba đường vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Ví dụ 1	HS học kĩ năng nhận biết hình chiếu vuông góc của điểm, đường thẳng, vận dụng định lí ba đường vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết hình chiếu vuông góc điểm, đường thẳng, tam giác.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Do $SO \perp (ABC)$ và $SA = SB = SC$ nên $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ $\Rightarrow OA = OB = OC$. b) Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) là OA. c) Do $SO \perp (ABC)$ nên $SO \perp BC$, mà $AO \perp BC$ suy ra $BC \perp (SOA)$. Do đó $BC \perp SA$. d) Hình chiếu của mỗi tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC) lần lượt là tam giác OBC, OCA, OAB.
2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG		
HĐ3	Dẫn tới khái niệm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ để HS thực hiện. *Lưu ý*. HS chỉ cần trả lời là thông tin chưa đủ để xác định độ cao mà không cần giải thích thêm.
Khung kiến thức	Định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS. *Lưu ý*. Cho HS quan sát hình vẽ trong SGK để dễ hình dung về các trường hợp.
Chú ý	HS hiểu hơn về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Nhận xét	Một cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Tiết 2. Ví dụ, vận dụng và chữa Bài tập

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Ví dụ 2	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Vận dụng	HS vận dụng hiểu biết toán học để giải thích hiện tượng Địa lí.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Gọi a, b là hai vị trí của trục Trái Đất, $a \parallel b$. Gọi a', b' tương ứng là hình chiếu của a, b trên (P). Hai mặt phẳng mp(a, a') và mp(b, b') chứa hai phương tương ứng song song với nhau đó là các phương cùng vuông góc với (P) (phương chiếu) và $a \parallel b$. Do đó hai mặt phẳng mp(a, a') và mp(b, b') song song với nhau hoặc trùng nhau. Suy ra hai giao tuyến của chúng với (P) là a' và b' cũng song song hoặc trùng nhau. *Lưu ý*. Kết luận ở câu a thực chất được rút ra từ tính chất sau của phép chiếu song song: Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song có phương khác phương chiếu thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. b) Hình chiếu của trục Trái Đất lên mặt phẳng (P) có phương cố định. Gọi m là đường thẳng đi qua tâm Mặt Trời và có phương cố định nói trên. Khi đó, hình chiếu của trục Trái Đất xuống (P) thuộc đường thẳng m khi và chỉ khi tâm Trái Đất ở vị trí là giao của m với đường elip quỹ đạo của Trái Đất. Như vậy có hai vị trí thuộc quỹ đạo, ứng với hai thời điểm trong năm mà hình chiếu của trục Trái Đất trên (P) thuộc đường thẳng m (nối tâm Trái Đất và tâm Mặt Trời).

Khám phá	HS phát hiện mối quan hệ về góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
		Gợi ý. Trường hợp 1. Đường thẳng a không vuông góc với (P) và cắt (P) tại một điểm O. Lấy điểm A khác O thuộc a và gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P).
		Khi đó, $\Delta \mathbin{//} a$ và
		$(\Delta, a) = (AH, a) = \widehat{HAO} = 90^\circ - \widehat{AOH}$
		$= 90^\circ - (a, P)$.
		Vậy góc giữa a và Δ phụ với góc giữa a và (P).
		Trường hợp 2: a vuông góc với (P). Khi đó,
		$a \mathbin{//} \Delta$ và $(a, \Delta) = 0^\circ, (a, P) = 90^\circ$.
		Trường hợp 3: a song song hoặc thuộc (P). Khi đó, $a \perp \Delta$ và $(a, \Delta) = 90^\circ, (a, P) = 0^\circ$.
		Như vậy kết luận đã nêu trong trường hợp 1 cũng đúng đối với cả hai trường hợp sau.

Trải nghiệm	HS thực hiện trải nghiệm nhỏ về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	– GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ để HS thực hiện. – GV cho 2 HS giữ cố định dây (nên cho một đầu dây gắn xuống đất), một số HS khác lần lượt xác định hình chiếu vuông góc của dây trên sàn nhà và đo góc. Ghi lại các kết quả đo và so sánh. *Lưu ý*. HS có thể dùng dây dọi để xác định phương vuông góc với sàn nhà nằm ngang.
Kiểm tra, chữa bài tập		GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.

3. Phân loại bài tập

- Xác định hình chiếu của điểm, đoạn thẳng, tam giác trên một mặt phẳng: Các Bài tập 7.10, 7.11, 7.12a.
- Xác định và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Các Bài tập 7.12b, 7.13.
- Vận dụng hiểu biết về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng vào việc mô tả và tính góc giữa các đối tượng tương ứng trong thực tế: Các Bài tập 7.14, 7.15.

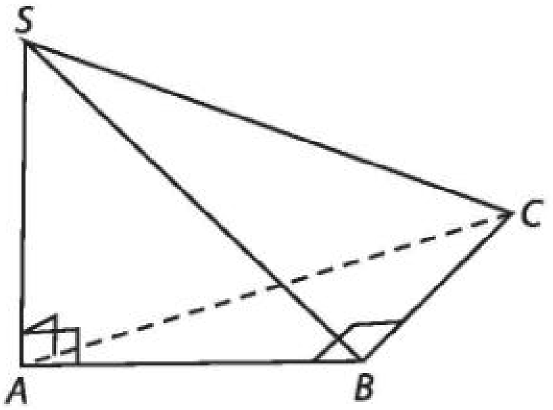
VI. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

7.10. (H.7.6)

a) Hình chiếu của S trên (ABC) là điểm A.

b) Hình chiếu của tam giác SBC trên (ABC) là tam giác ABC.

c) Hình chiếu của tam giác SBC trên (SAB) là đoạn SB vì $CB \perp (SAB)$.



Hình 7.6

7.11. (H.7.7)

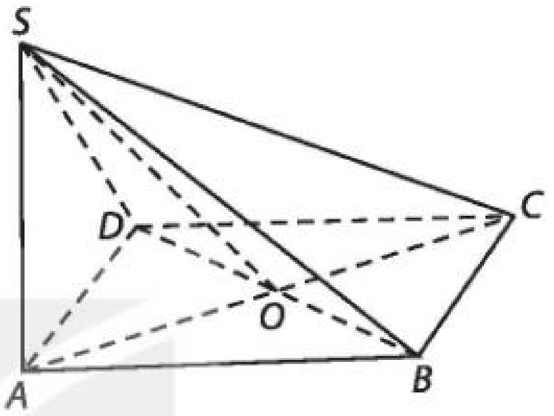
a) Vì $AC = a\sqrt{2}, SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45°$.

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$.

b) Vì $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Vậy góc giữa BD và (SAC) bằng $90°$.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hình chiếu của SB trên (SAC) là SO.



Hình 7.7

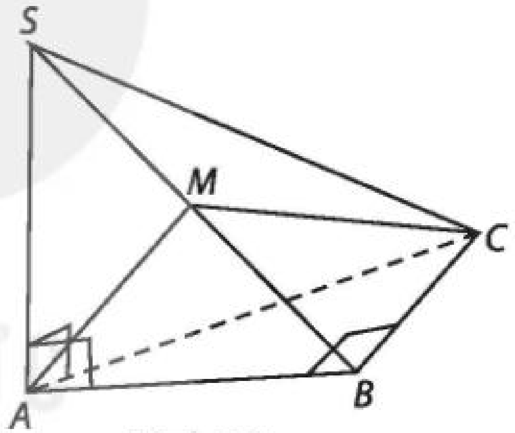
7.12. (H.7.8)

a) Vì $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, $AM \perp SB$ tại $M \Rightarrow AM \perp (SBC)$. Hình chiếu của A trên (SBC) là M.

b) Góc giữa SC và (ABC) là góc SCA.

Ta có: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Do đó $\widehat{SCA} = 45°$.



Hình 7.8

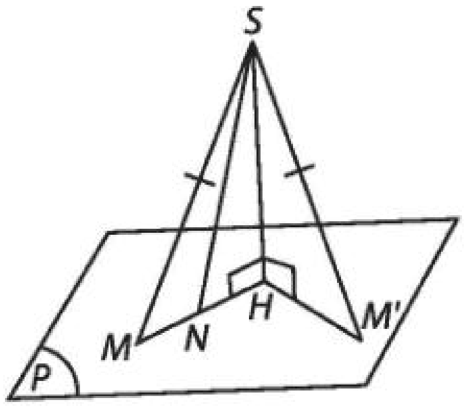
7.13. (H.7.9)

a) $\Delta SHM = \Delta SHM' \Rightarrow HM = HM'$.

b) Trên tia HM lấy điểm N sao cho $SN = SM'$

$\Rightarrow HN = HM'$ mà $SM > SM' \Rightarrow SM > SN$

$\Rightarrow HM > HN \Rightarrow HM > HM'$.



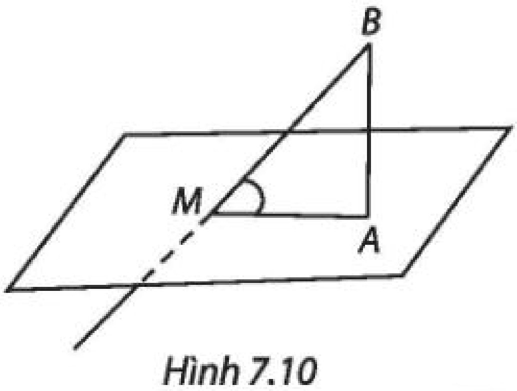
Hình 7.9

7.14. Vì $AM = A'M'$,

$BM = AM \cdot \sin 10° < A'M' \cdot \sin 15° = B'M'$.

7.15. (H.7.10) Giả sử một cột AB, bóng của cột AB là AM.

Khi đó $\tan\widehat{BMA} = \dfrac{AB}{AM}$. Từ đó tính được góc $\widehat{BAM}$.



Hình 7.10

Bài 25. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC (4 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được góc giữa hai mặt phẳng và hai mặt phẳng vuông góc với nhau.
- Xác định được điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau.
- Giải thích được tính chất cơ bản của hai mặt phẳng vuông góc.
- Nhận biết được góc phẳng nhị diện và biết tính số đo của góc phẳng nhị diện trong một số trường hợp đơn giản.
- Giải thích được tính chất cơ bản của hình chóp đều, hình lăng trụ đứng và các trường hợp đặc biệt của nó.
- Vận dụng kiến thức bài học để mô tả một số hình ảnh thực tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (thước kẻ hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (chẳng hạn, thông qua việc xác định góc mở của cánh cửa, diễn giải vĩ độ và kinh độ, mô tả một số hình ảnh trong thực tế).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Nhấn mạnh đến hai cách xác định góc giữa hai mặt phẳng thường gặp: Bằng định nghĩa và bằng cách như được nêu trong Nhận xét ở Mục 1.
- Khái niệm vĩ độ và kinh độ được diễn đạt chính xác ở cuối Mục 4.
- Thông thường, khi xét độ dốc của một con đường ta coi con đường như là một đường thẳng và độ dốc là góc tạo bởi đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang tại đó.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Bài học có thời lượng 4 tiết, có thể phân bổ như sau:

Tiết 1: Mục 1 và mục 2.

Tiết 2: Mục 3 và mục 4.

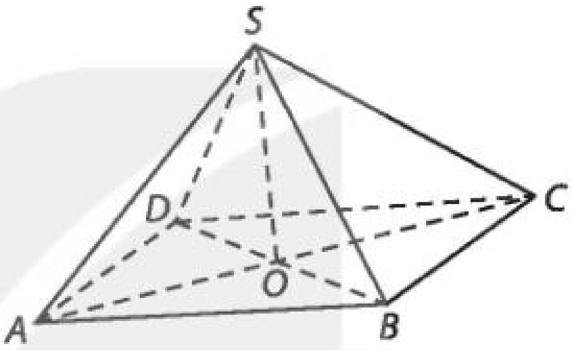
Tiết 3: Mục 5 và mục 6.

Tiết 4: Chữa Bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1. Góc giữa hai mặt phẳng, Hai mặt phẳng vuông góc. Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu bài học	Nêu một khái niệm Địa lí có ẩn chứa khái niệm Toán học.	GV trình bày cho HS theo SGK. *Lưu ý*. Điều này được diễn đạt chính xác theo ngôn ngữ toán học ở cuối Mục 4.
1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC		
HĐ1	Cho phép quy khái niệm góc giữa hai mặt phẳng về góc giữa hai đường thẳng tương ứng vuông góc với hai mặt phẳng đó.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Vì a và a' cùng vuông góc với (P) nên chúng song song hoặc trùng nhau. Tương tự, b và b' cũng song song hoặc trùng nhau. Vậy $(a,b)=(a',b')$.
Khung kiến thức	Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Giúp HS hiểu hơn về khung kiến thức.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
?	Giúp HS hiểu hơn về khung kiến thức.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý*. Xét hai đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q). Khi đó góc giữa (P) và (Q) bằng 0° khi và chỉ khi $(a,b)=0^\circ$, tức là a và b song song hoặc trùng nhau; điều này tương đương với (P) và (Q) song song hoặc trùng nhau. Vậy góc giữa hai mặt phẳng bằng 0° khi và chỉ khi hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau.

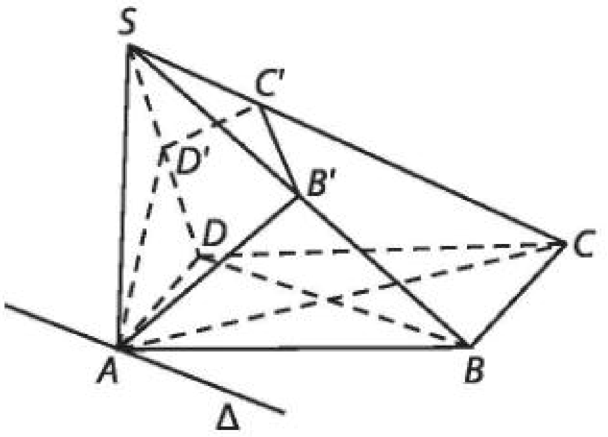
Ví dụ 1	Một cách xác định góc giữa hai mặt phẳng thường gặp.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Nhận xét	Kết luận rút ra từ Ví dụ 1.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $AO \perp SO$, $BO \perp SO$ và $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên góc giữa (SAC) và (SBD) bằng góc giữa AO và BO. Do đó $(SAC) \perp (SBD) \Leftrightarrow AO \perp BO$ $\Leftrightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông. 

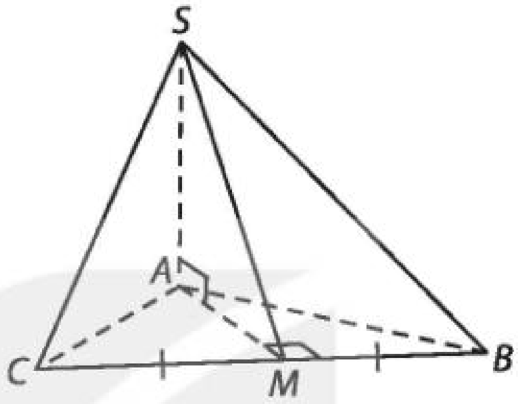
2. ĐIỀU KIỆN HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

HĐ2	Dẫn tới điều kiện hai mặt phẳng vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ để HS thực hiện. *Gợi ý*. a) Vì $a \perp (P)$ và $b \subset (P)$ nên $a \perp b$. Vậy $(a,b) = 90^\circ$. b) Do a và b tương ứng vuông góc với (P) và (Q). Do đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa a và b và bằng 90°.
Khung kiến thức	Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 2	HS học kĩ năng dùng điều kiện hai mặt phẳng vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 2	HS rèn luyện kĩ năng dùng điều kiện hai mặt phẳng vuông góc.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ để HS thực hiện. *Gợi ý*. Mặt phẳng cánh cửa chứa đường thẳng nối các bản lề. Mặt khác đường thẳng này vuông góc với sàn nhà. Do đó mặt phẳng cánh cửa vuông góc với sàn nhà.

Tiết 2. Tính chất hai mặt phẳng vuông góc. Góc nhị diện

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. TÍNH CHẤT HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC		
HĐ3	Dẫn dắt tới khung kiến thức.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Theo Nhận xét ở Mục 1, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa a và b. Mặt khác (P) và (Q) vuông góc với nhau. Do đó $(a,b) = 90^\circ$. b) Vì a vuông góc với Δ và b nên a vuông góc với (Q).
Khung kiến thức	Tính chất hai mặt phẳng vuông góc.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Nhận xét	HS hiểu hơn về khung kiến thức.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
HĐ4	Dẫn dắt tới khung kiến thức.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ cho HS thực hiện. *Gợi ý.* a) Do (P) vuông góc với (R) và đường thẳng a' đi qua $O \in (P)$ vuông góc với (R) nên theo Nhận xét ở Mục 2, a' thuộc (P). Tương tự, a' thuộc (Q). b) Do a' thuộc (P) và (Q) nên a' chính là giao tuyến a của (P) và (Q). c) Do a trùng a' nên a cũng vuông góc với (R).
Khung kiến thức	Tính chất giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 3	HS học kĩ năng nhận biết đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 3	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết hai mặt phẳng vuông góc với nhau và vận dụng tính chất giao tuyến	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý.* a) Vì $SC \perp (AB'C'D')$, $SC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (AB'C'D')$. Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

	của hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng.	b) Ta có: $\Delta = (AB'C'D') \cap (ABCD)$, $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp \Delta$. Lại có $SC \perp (AB'C'D') \Rightarrow SC \perp \Delta$ $\Rightarrow \Delta \perp (SAC) \Rightarrow \Delta \perp AC$. 
4. GÓC NHỊ DIỆN		
HĐ5	Hình thành khái niệm góc nhị diện, góc phẳng nhị diện.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Góc xOy (Không yêu cầu HS giải thích gì thêm). b) Góc giữa mặt phẳng chứa mặt ghế và mặt phẳng chứa lưng ghế bằng góc giữa hai đường thẳng tương ứng chứa *Ox*, Oy (Nhận xét ở Mục 1). Vì $100^\circ \leq \widehat{xOy} \leq 105^\circ$ nên góc giữa hai đường thẳng tương ứng chứa *Ox*, *Oy* có thể nhận số đo từ 75° đến 80°. Vậy góc giữa mặt phẳng chứa mặt ghế và mặt phẳng chứa lưng ghế có thể nhận số đo từ 75° đến 80°.
Khung kiến thức	Khái niệm góc nhị diện và khái niệm góc phẳng nhị diện.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Bổ sung cho khung kiến thức.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 4	HS học kĩ năng nhận biết góc nhị diện, góc phẳng nhị diện và tính số đo của góc nhị diện.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Luyện tập 4	HS rèn luyện kĩ năng nhận biết góc nhị diện, góc phẳng nhị diện và tính số đo của góc nhị diện.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) $AM \perp BC, SM \perp BC \Rightarrow \widehat{SMA}$ là một góc phẳng nhị diện $\left[S, BC, A\right]$. b) $AM = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \tan\widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \widehat{SMA} = 30^\circ$. 
Vận dụng 1	HS vận dụng hiểu biết về số đo góc nhị diện.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Gọi *I*, *J* lần lượt là tâm của nửa hình tròn khung cửa và nửa hình tròn cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau, do đó chúng cũng song song với giao tuyến *m* (qua *O*) của hai mặt phẳng tương ứng chứa khung và cánh cửa. Vì *O* là trung điểm của các cung tròn khung cửa và cánh cửa nên *OI* vuông góc với đường kính khung cửa, *OJ* vuông góc với đường kính cánh cửa. Vậy *OI*, *OJ* cùng vuông góc với *m*. Do đó $\widehat{IOJ}$ là một góc phẳng nhị diện của nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa. Ta có $m \perp OI, m \perp OJ$ nên $m \perp IJ$. Vậy IJ cũng vuông góc với các đường kính cánh cửa và khung cửa. Do đó $IJ = 40$ cm. Mặt khác $OI = OJ = 40\,\text{cm}$, suy ra tam giác OIJ đều và $\widehat{IOJ} = 60^\circ$. Vậy để khoảng cách *d* giữa

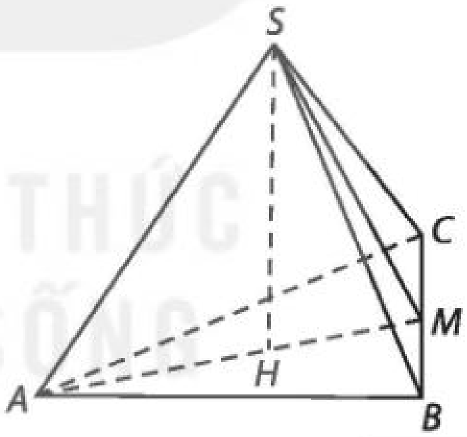
		đường kính cánh cửa và đường kính khung cửa bằng 40 cm thì góc nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa có số đo là 60^{o}.
Giải thích khái niệm vĩ độ và kinh độ	HS vận dụng hiểu biết về số đo góc phẳng nhị diện, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Tiết 3. Một số hình lăng trụ đặc biệt. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
5. MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT		
a) Hình lăng trụ đứng		
Khung kiến thức	Định nghĩa hình lăng trụ đứng.	GV trình bày, giảng giải cho HS
HĐ6	Tìm hiểu về tính chất của hình lăng trụ đứng.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý*. Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành. Mặt khác, lăng trụ đứng có các cạnh bên vuông góc với đáy và vì vậy các cạnh bên vuông góc với các cạnh đáy. Do đó hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật. Vì các cạnh bên vuông góc với đáy nên các mặt bên cũng vuông góc với đáy.
Khung kiến thức	Tính chất của hình lăng trụ đứng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
b) Hình lăng trụ đều		
Khung kiến thức	Khái niệm hình lăng trụ đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
HĐ7	Tìm hiểu tính chất hình lăng trụ đều.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý*. Hình lăng trụ đều trước hết là hình lăng trụ đứng nên các mặt bên của nó là các hình chữ nhật. Mặt khác, các cạnh đáy của lăng trụ đều bằng nhau và các cạnh bên của

		một lăng trụ luôn bằng nhau. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật có cùng kích thước.
Khung kiến thức	Tính chất hình lăng trụ đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
c) Hình hộp đứng		
Khung kiến thức	Khái niệm hình hộp đứng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
HĐ8	Tính chất hình hộp đứng.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý*. Hình hộp đứng là một trường hợp đặc biệt của hình lăng trụ đứng, có 4 mặt bên là các hình chữ nhật, còn hai đáy là hai hình bình hành. Do đó nó có ít nhất 4 mặt là bốn hình chữ nhật, đó là các mặt bên.
Khung kiến thức	Tính chất của hình hộp đứng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
d) Hình hộp chữ nhật		
Khung kiến thức	Khái niệm hình hộp chữ nhật.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
HĐ9	Tìm hiểu tính chất hình hộp chữ nhật.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý*. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là các hình chữ nhật.
Khung kiến thức	Tính chất hình hộp chữ nhật.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 5	Củng cố tính chất của hình hộp chữ nhật.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
e) Hình lập phương		
Khung kiến thức	Định nghĩa hình lập phương.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
HĐ10	Tìm hiểu tính chất hình lập phương.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý*. Hình lập phương trước hết là hình hộp chữ nhật nên có các mặt là các hình chữ nhật. Mặt khác, nó có các cạnh bằng nhau nên các mặt là các hình vuông.

Chú ý	Gọi tên lăng trụ đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 6	Củng cố tính chất của hình lập phương.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Vận dụng 2	HS vận dụng kiến thức về hình hộp chữ nhật để tạo dựng hình thực tế.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Thùng có đáy và các mặt bên là các hình chữ nhật. Điều đó cũng kéo theo rằng miệng thùng là một hình chữ nhật (có các cạnh tương ứng song song và bằng cạnh đáy) thuộc mặt phẳng song song với đáy. Vì các cạnh bên song song với nhau nên thùng là một hình lăng trụ. Mặt khác, mỗi cạnh bên của thùng đều vuông góc với đáy (vì vuông với hai cạnh kề của đáy). Do đó thùng là lăng trụ đứng, hơn nữa, có đáy là hình chữ nhật nên thùng có dạng hình hộp chữ nhật.
6. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU		
HĐ11	HS làm quen với một hình chóp đều trong thực tế.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*. Giả sử tháp có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy. Do $SA = SB = SC = SD$ nên áp dụng định lí Pythagore cho các tam giác vuông SOA, SOB, SOC, SOD ta nhận được $OA = OB = OC = OD$. Do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$, tức là O là tâm hình vuông $ABCD$.
Khung kiến thức	Định nghĩa hình chóp đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Cách gọi tên hình chóp đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS. Chú ý thứ nhất là một sự khái quát hoá HĐ11.
HĐ12	Tìm hiểu tính chất hình chóp đều.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Do hình chóp là đều nên $SA_1 = \ldots = SA_n$.

		Từ đó, áp dụng định lí Pythagore, ta suy ra $OA_1 = \ldots = OA_n$. Do đó O là tâm của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$. b) Do đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và O cách đều các đỉnh của đa giác đó nên áp dụng định lí Pythagore, ta suy ra $SA_1 = \ldots = SA_n$. Vậy hình chóp đã cho là hình chóp đều.
Khung kiến thức	Điều kiện để một hình chóp là hình chóp đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 7	HS học kĩ năng nhận biết hình chóp đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 5	HS rèn luyện kĩ năng về hình chóp đều và góc nhị diện.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý.* Gọi M là trung điểm của BC. Ta tính được $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, SM = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$ $\Rightarrow \cos\widehat{SMH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SMH} = 45°$. 
HĐ13	Hình thành khái niệm hình chóp cụt đều.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý.* a) Các đa giác $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có các cạnh tương ứng song song. Áp dụng định lí Thalès, ta có $\dfrac{SB_1}{SA_1} = \cdots = \dfrac{SB_n}{SA_n}$ suy ra $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \cdots = \dfrac{B_nB_1}{A_nA_1}$. Từ đó, vì đa giác $A_1A_2...A_n$ đều nên đa giác $B_1B_2...B_n$ là đều và do $SA_1 = \cdots = SA_n$ nên $SB_1 = \cdots = SB_n$. Vậy $S.B_1B_2...B_n$ là hình chóp đều.

		b) Vì H là tâm của đáy $A_1A_2...A_n$ và hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ là đều; SH vuông góc với mặt phẳng $A_1A_2...A_n$. Do hai mặt phẳng $\left(A_1A_2...A_n\right)$ và $\left(B_1B_2...B_n\right)$ song song với nhau nên SA cũng vuông góc với mặt phẳng $\left(B_1B_2...B_n\right)$. Hơn nữa, vì hình chóp $S.B_1B_2...B_n$ đều nên giao của SH và $\left(B_1B_2...B_n\right)$ là tâm của đáy $B_1B_2...B_n$.
Khung kiến thức	Định nghĩa hình chóp cụt đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
?	HS hiểu hơn về hình chóp cụt đều.	GV nêu để HS trả lời. *Gợi ý*. Cạnh của hình chóp cụt đều bằng hiệu giữa các cạnh bên của hai hình chóp đều tương ứng. Do đó hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau.
Ví dụ 8	HS học kĩ năng về hình chóp cụt đều.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Tiết 4. Chữa Bài tập cuối bài

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Bài tập cuối bài học	Kiểm tra kết quả làm bài của HS, chữa bài cho HS.	GV tổ chức, giám sát, kiểm tra, chữa bài cho HS. Tuỳ thực tế làm bài của HS, GV chọn một số bài tập để đi sâu vào phân tích, chỉnh sửa cho HS.

3. Phân loại bài tập

- Quan hệ vuông góc giữa các mặt phẳng, góc nhị diện: Các Bài tập 7.16, 7.17, 7.18, 7.20.
- Hình lập phương, hình hộp chữ nhật: Các Bài tập 7.17, 7.18, 7.19.
- Hình chóp đều: Bài 7.21.
- Vận dụng vào thực tế các khái niệm góc nhị diện, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng: Các Bài tập 7.20, 7.21.

VI. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

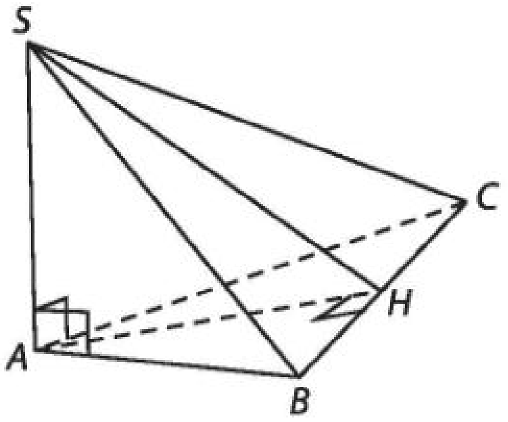
7.16. (H.7.11)

a) $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Vì $BC \perp AH, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

b) $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SHA} = 45^\circ$.



Hình 7.11

7.17. (H.7.12)

a) Ta có: $AC = a\sqrt{2},\ CC' = a$.

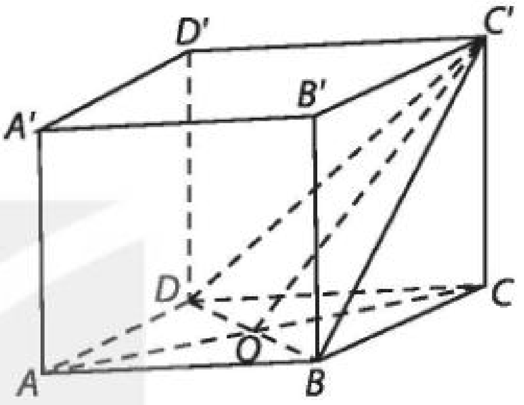
Do đó $AC' = \sqrt{CC'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

b) $AC \perp BD, AC \perp BB' \Rightarrow AC \perp (BDD'B')$

$\Rightarrow (ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, CC' = a \Rightarrow \tan\widehat{COC'} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{COC'} \approx 55^\circ$

và góc nhị diện $[A, BD, C']$ bằng $180^\circ - \widehat{COC'} \approx 125^\circ$.



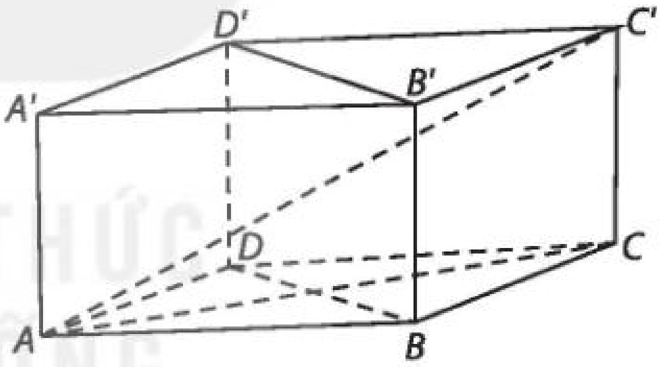
Hình 7.12

7.18. (H.7.13)

a) $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow (BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$ là AC.

c) $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



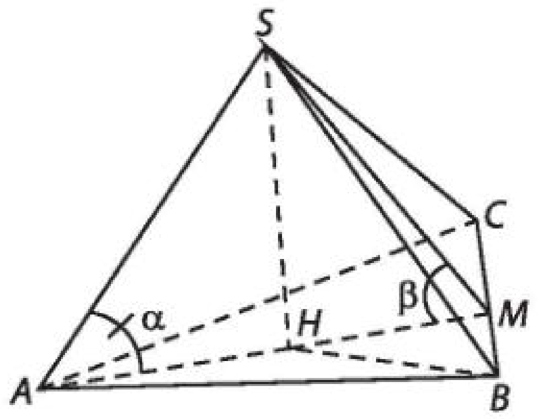
Hình 7.13

7.19. (H.7.14) $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, SH = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}}$.

Gọi α, β lần lượt là góc giữa SA và (ABC), góc giữa (SBC) và (ABC).

a) Ta có: $\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{3b^2}}$.

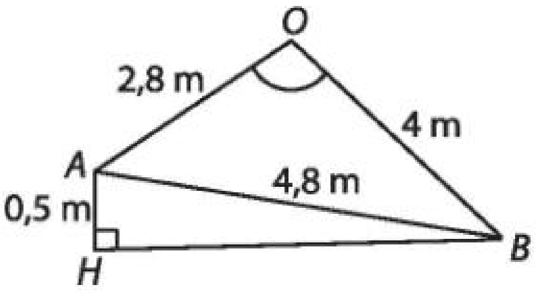
b) Vì $HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ nên $\tan\beta = \dfrac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$.



Hình 7.14

7.20. (H.7.15)

a) $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \dfrac{1}{28} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 88^\circ$.



Hình 7.15

b) (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên (OAB) vuông góc với mặt phẳng đất.

c) $\sin \widehat{ABH} = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 6^\circ$; $\cos \widehat{OBA} = \frac{13}{16} \Rightarrow \widehat{OBA} \approx 36^\circ$.

Do đó $\widehat{OBH} = \widehat{ABH} + \widehat{OBA} \approx 42^\circ$.

7.21. $\tan \alpha \le \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \le 4,76^\circ$.

Bài 26. KHOẢNG CÁCH (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Xác định được khoảng cách giữa các đối tượng điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.
- Xác định được đường thẳng vuông góc chung của hai đường chéo nhau trong một số trường hợp đơn giản.
- Vận dụng kiến thức về khoảng cách vào một số tình huống thực tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (chẳng hạn, thông qua việc xác định khoảng cách từ xà ngang khống chế chiều cao xuống mặt dốc, đo độ sâu của nước trong bể có mặt đáy nằm ngang).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

Sau bài học GV có thể cho HS thảo luận và chốt lại khoảng cách giữa hai đối tượng được đề cập trong bài học là độ dài đoạn thẳng ngắn nhất nối một điểm thuộc đối tượng này với một điểm thuộc đối tượng còn lại.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Bài học có thời lượng 3 tiết, có thể phân bổ như sau:

Tiết 1: Từ đầu bài học đến hết Chú ý trước Ví dụ 2.

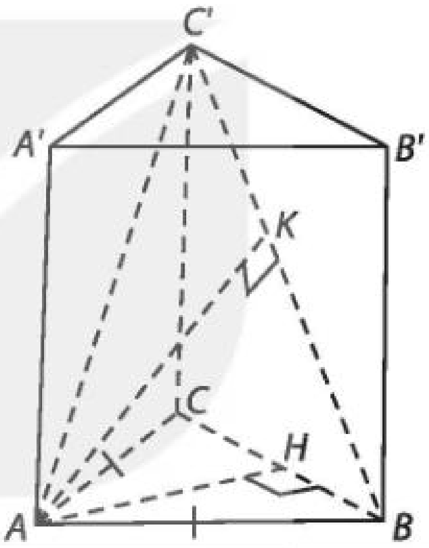
Tiết 2: Từ Ví dụ 2 đến hết Mục 3.

Tiết 3: Chữa Bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

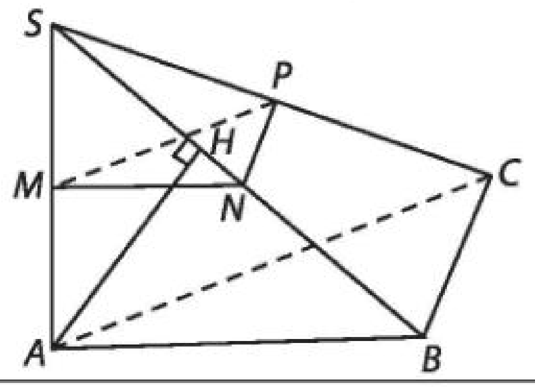
Tiết 1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

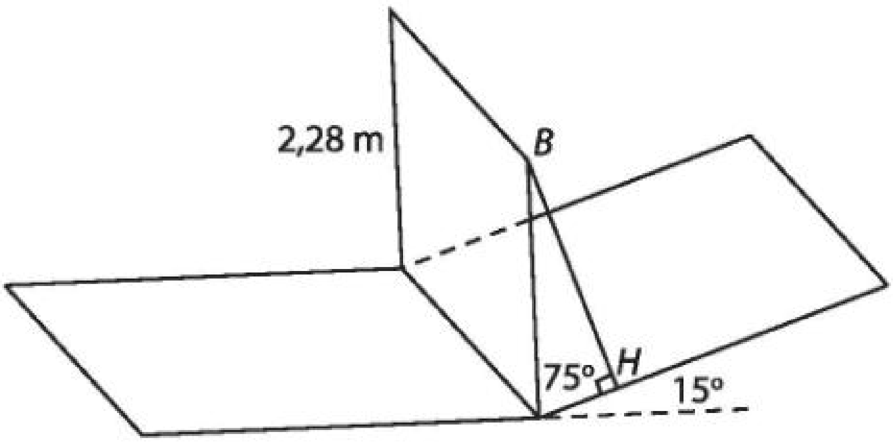
HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu bài học	Dẫn nhập và hình ảnh về tình huống thực tế có xuất hiện khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.	GV trình bày như SGK.
1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG		
HĐ1	Cho HS thấy tính ngắn nhất của khoảng cách.	GV tổ chức, giám sát, gợi ý để HS thực hiện *Gợi ý.* Dùng tính chất cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông trong một tam giác vuông.
Khung kiến thức	Định nghĩa khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Chú ý	Giới thiệu trường hợp đặc biệt.	GV lưu ý cho HS.
Nhận xét	Tính ngắn nhất của khoảng cách.	GV lưu ý cho HS.
Chú ý	Chiều cao của hình chóp.	GV lưu ý cho HS.
Ví dụ 1	HS học kĩ năng tính khoảng cách.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

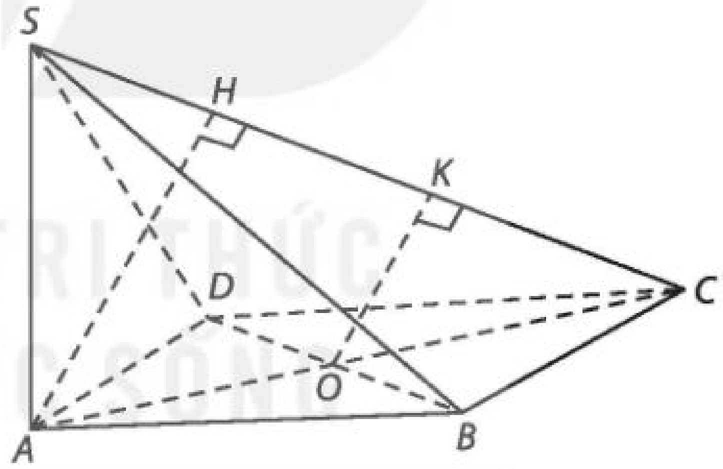
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng tính khoảng cách.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS làm bài. *Gợi ý* a) $AH \perp BC$ tại H thì $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. b) $AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AB \perp AC' \Rightarrow \Delta ABC'$ vuông tại A. $AC' = \sqrt{a^2 + h^2}, BC' = \sqrt{2a^2 + h^2}$. Kẻ AK vuông góc với BC' tại K, ta tính được $AK = \frac{a\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$. 
2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG		
HĐ2	Đi đến khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý.* AM và BN cùng vuông góc với (P) nên song song với nhau. Do vậy A, M, N, B thuộc cùng một mặt phẳng. Do MN // (P) nên mặt phẳng $(AMNB)$ cắt (P) theo giao tuyến AB song song với MN. Vậy tứ giác $AMNB$ có các cạnh đối song song với nhau. Mặt khác AM vuông góc với AB. Do đó $AMNB$ là một hình chữ nhật. Vì $AM = BN$ nên M và N có cùng khoảng cách đến (P).
Khung kiến thức	Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

HĐ3	Đi đến khoảng cách giữa hai đường thẳng song song, hai mặt phẳng song song.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện.
Khung kiến thức	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, giữa hai đường thẳng song song.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
?	Giới thiệu trường hợp đặc biệt.	GV nêu để HS trả lời.
Chú ý	Chiều cao của lăng trụ.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Tổng kết tiết học	HS nhìn lại các nội dung chính đã học. Dặn dò, nhắc nhở HS.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2. Luyện tập về khoảng cách và đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Ví dụ 2	HS học cách tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 2	HS rèn luyện kĩ năng tính khoảng cách.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý.* a) $d((MNP),(ABC)) = AM = \frac{h}{2}$; $d(NP,(ABC)) = \frac{h}{2}$. b) $AH \perp SB$ tại H $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. 

Vận dụng	Vận dụng thực tế.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý*  Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc xuống mặt dốc. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng dốc là $BH = 2,28 \cdot \sin 75^\circ \approx 2,2$ (m). Do đó không cho phép xe cao 2,21 m đi qua.
3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU		
HĐ4	Đi đến khái niệm đường vuông góc chung.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Vì a' là hình chiếu vuông góc của a trên (Q) nên a và a' thuộc cùng một mặt phẳng. Hơn nữa, mặt phẳng đó chứa phương chiếu là đường thẳng vuông góc với (Q) nên mặt phẳng chứa a, a' vuông góc với (Q). b) Do a song song với (Q) nên giao tuyến a' của mặt phẳng chứa a, a' với (Q) song song với a. Do MN vuông góc với a nên MN vuông góc với a'. Trong mặt phẳng chứa a và a', MN và phương chiếu vuông góc lên (Q) cùng vuông góc với a nên song song với nhau. Do đó MN vuông góc với (Q). Vậy MN cũng vuông góc với b. c) Do a song song với (Q) và MN vuông góc với (Q) nên khoảng cách giữa a và (Q) bằng MN.
Khung kiến thức	Đường vuông góc chung, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.	GV trình bày, giảng giải cho HS.

Nhận xét	Nhấn mạnh để HS hiểu hơn khung kiến thức.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Ví dụ 3	HS học cách xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Khám phá	Củng cố về khoảng cách giữa hai đường thẳng.	*Gợi ý*. Khoảng cách từ O đến b là OH mà OH là đoạn vuông góc chung của a và b nên $d(a,b) = OH$. Do đó khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách từ O đến b.
Luyện tập 3	HS rèn luyện kĩ năng xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) $d(A,SC) = a$. b) $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$. c) $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OK, OK \perp SC$ $\Rightarrow d(BD,SC) = OK = \frac{AH}{2} = \frac{a}{2}$. 
Thảo luận	Tính ngắn nhất của khoảng cách.	GV tổ chức để HS thảo luận. GV hướng dẫn HS nhìn lại các hoạt động dẫn đến khái niệm khoảng cách.
Tổng kết tiết học	HS nhìn lại các nội dung chính đã học. GV dặn dò, nhắc nhở HS.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Khoảng cách, đường vuông góc chung: Các Bài tập 7.22, 7.23, 7.24, 7.25.
- Vận dụng khoảng cách vào thực tế: Các Bài tập 7.26, 7.27.

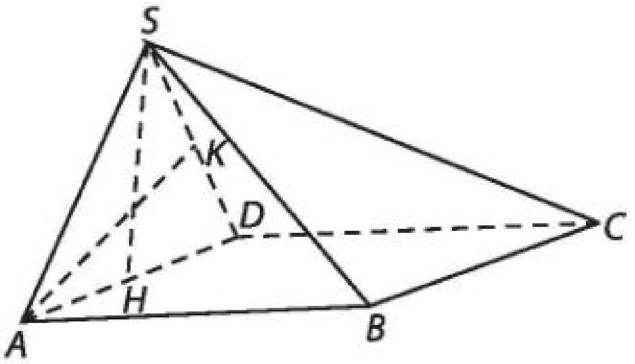
VI. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

7.22. (H.7.16)

a) $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) $d(BC,(SAD)) = d(B,(SAD)) = AB = a$.

c) $d(AB,SD) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

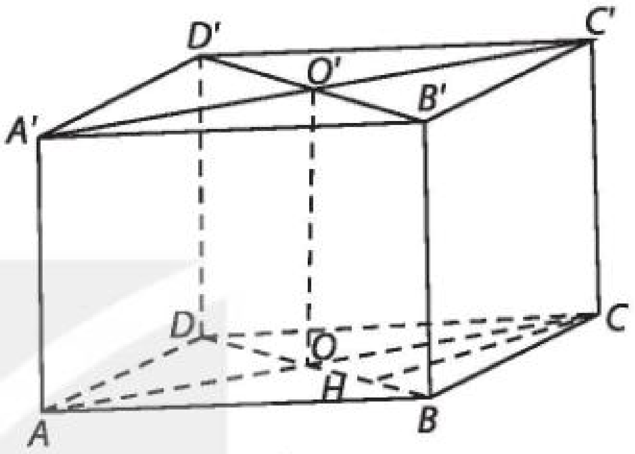


Hình 7.16

7.23. (H.7.17)

a) $d(CC',(BDD'B')) = CH = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

b) $d(AC, B'D') = OO' = a$.



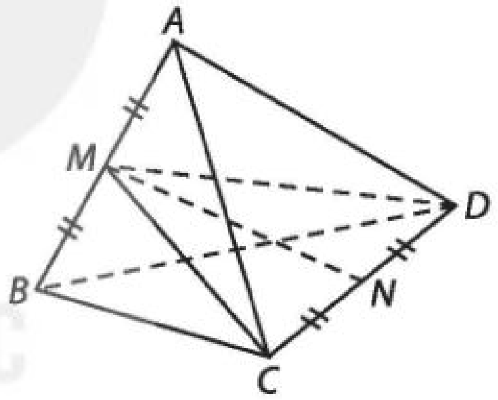
Hình 7.17

7.24. (H.7.18)

a) $AB \perp DM, AB \perp CM \Rightarrow AB \perp (MCD) \Rightarrow AB \perp MN$.

Tương tự $CD \perp MN$.

b) $AB \perp (MCD) \Rightarrow AB \perp CD$. Tương tự cho các cặp còn lại.



Hình 7.18

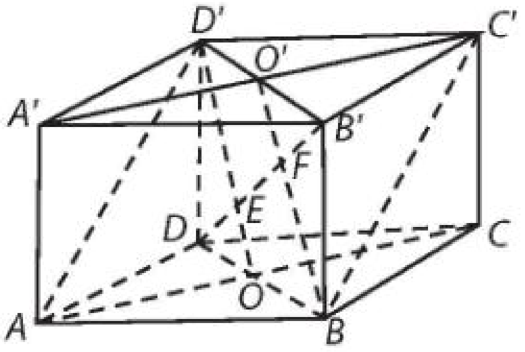
7.25. (H.7.19)

a) $(D'AC)//(BC'A'), (BC'A') \perp DB'$.

Vì $AC \perp (BDD'B') \Rightarrow AC \perp DB'$; $AD' \perp (DA'B')$

$\Rightarrow AD' \perp DB' \Rightarrow DB' \perp (ACD')$.

b) $d((D'AC),(BA'C')) = EF = \dfrac{1}{3}DB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Hình 7.19

7.26. Chiều cao của giá đỡ là $\sqrt{129^2 - \left(\dfrac{110\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 112$ (cm).

7.27. Sợi dây của quả dọi có phương vuông góc với đáy bể và vuông góc với mặt nước.

Bài 27. THỂ TÍCH (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp, khối chóp cụt đều.
- Tính được thể tích của các khối trên trong một số trường hợp đơn giản.
- Vận dụng kiến thức, kĩ năng về thể tích vào một số tình huống thực tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke hoặc phần mềm vẽ hình).
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học).
- Năng lực mô hình hoá toán học (chẳng hạn, thông qua việc tính thể tích sọt đựng đồ hình chóp cụt đều, tạo lập thùng dạng chóp cụt đều).
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Lưu ý cho HS (và nếu có điều kiện, làm rõ) mối quan hệ qua lại giữa bài toán tính khoảng cách và bài toán tính thể tích.
- Bài học chỉ đưa ra (không xây dựng) công thức thể tích của các hình khối. Trong số đó, có một số công thức HS đã biết ở các lớp dưới.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

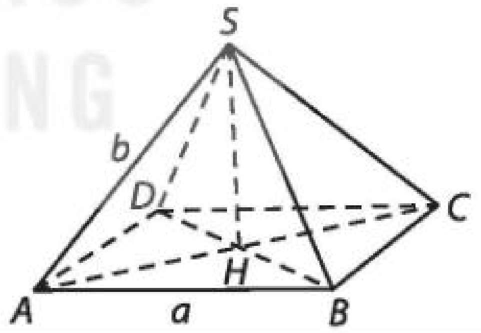
Bài học có thời lượng 2 tiết, có thể phân bổ như sau:

Tiết 1: Từ đầu bài học đến hết Luyện tập 2.

Tiết 2: Ví dụ 3 đến hết, chữa Bài tập cuối bài.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1. Thể tích

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu bài học	Đặt vấn đề để vào bài học.	GV trình bày như SGK.
HĐ1	Tình huống thực tế cần đo phần không gian giới hạn bởi một hình (căn phòng).	GV tổ chức, giám sát, gợi ý để HS thực hiện. HS đã biết công thức tính thể tích hình hộp chữ nhật. *Gợi ý*. Loại 12 000 BTU.
Khung kiến thức	Công thức thể tích của một số khối.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Nhận xét	Làm rõ hơn một số trường hợp đặc biệt.	GV lưu ý cho HS.
Ví dụ 1	HS học kĩ năng tính thể tích khối tứ diện.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 1	HS rèn luyện kĩ năng tính thể tích khối chóp.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS làm bài. *Gợi ý*. $SH=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}} \Rightarrow V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}.$ 
Ví dụ 2	HS học kĩ năng tính thể tích khối lăng trụ.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Luyện tập 2	HS rèn kĩ năng tính thể tích khối chóp cụt đều.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý* a) Diện tích đáy trên là $S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Diện tích đáy dưới là $S_2=a^2\sqrt{3}$.

		Thể tích của khối chóp cụt đều là $$V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})=\frac{7\sqrt{3}}{12}a^2h.$$ b) $AA'C'C_1$ là hình bình hành $\Rightarrow C'C_1//AA', B'B_1//AA'$ $\Rightarrow AB_1C_1.A'B'C'$ là hình lăng trụ. Thể tích khối lăng trụ là: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h.$
Tổng kết tiết học	HS nhìn lại các nội dung chính đã học. Dặn dò, nhắc nhở HS.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2. Luyện tập về thể tích

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Ví dụ 3	HS học kĩ năng tính thể tích khối lăng trụ.	GV trình bày, giảng giải cho HS.
Vận dụng	HS vận dụng kiến thức về thể tích vào một tình huống thực tế.	GV tổ chức, giám sát, hỗ trợ HS thực hiện. *Gợi ý.* Diện tích mặt đáy lớn là $$S_1=60^2\,(\text{cm}^2).$$ Diện tích mặt đáy nhỏ là $$S_2=30^2\,(\text{cm}^2).$$ Chiều cao là $h=\sqrt{50^2-\frac{30^2}{2}}=5\sqrt{82}$ (cm). $V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})\approx 95\,082$ (cm^3).
Bài tập	Kiểm tra, chữa bài.	GV gọi HS lên làm bài và chữa cho HS.

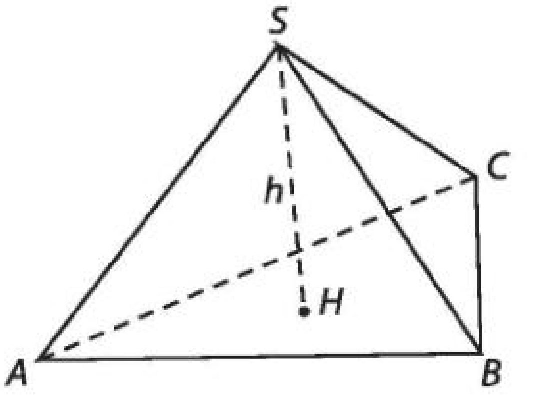
3. Phân loại bài tập

- Tính thể tích hình khối: Các Bài tập 7.28, 7.29, 7.30, 7.31.
- Vận dụng vào thực tế: Bài 7.32.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

7.28. (H.7.20) Thể tích: $V = \dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Khi $a = b \Rightarrow V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.



Hình 7.20

7.29. Diện tích mặt đáy là $S = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \sin 150^\circ = 3\,(\text{cm}^2)$.

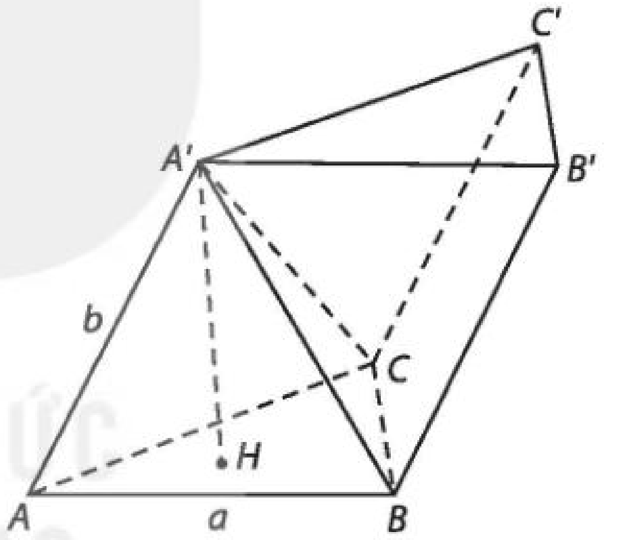
Vậy $V = 15 \text{ cm}^3$.

7.30. a) $h = OA \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{6} \Rightarrow V = 36\sqrt{6} \text{ cm}^3$.

b) $SO = h = OM = 3 \text{ cm} \Rightarrow V = 36 \text{ cm}^3$.

7.31. (H.7.21) $h = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}}, S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}}$.



Hình 7.21

7.32. a) $AB \parallel A'B' \Rightarrow AB \parallel (A'B'C'D')$, $AD \parallel A'D' \Rightarrow AD \parallel (A'B'C'D')$.

Do đó $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

b) Cạnh bên của hình chóp cụt bằng $\sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$ (dm).

c) Xét mặt chứa đường chéo của hình vuông, nó là hình thang cân có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp cụt và tính ra được $h = \sqrt{\dfrac{34}{4} - \dfrac{18}{4}} = 2\,(\text{dm})$.

Thể tích cần tìm là $V = 42$ lít.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

GV cho HS tóm tắt lí thuyết đã học ở nhà, lưu ý có các dạng toán cơ bản đó là những bài toán chứng minh vuông góc, tính góc, tính khoảng cách, tính thể tích.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

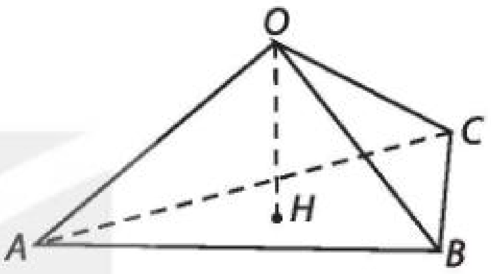
7.33. D **7.34.** B **7.35.** C

7.36. C **7.37.** C.

7.38. (H.7.22)

$d\big(O;(ABC)\big) = OH = h.$

Ta có: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{7}{4a^2} \Rightarrow h = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7}.$



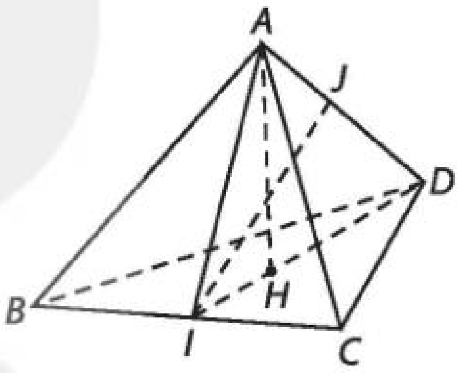
Hình 7.22

7.39. (H.7.23)

a) Vì $AI \perp BC, DI \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADI)$.

b) $BC \perp AH, AH \perp DI \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

c) $BC \perp IJ, IJ \perp AD$.



Hình 7.23

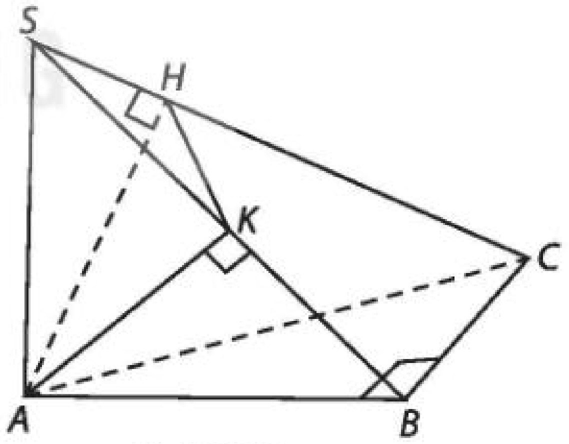
7.40. (H.7.24)

a) $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Kẻ $AH \perp SC$ tại H, $AK \perp SB$ tại K.

Ta tính được: $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $d(A,(SBC)) = AK = a\sqrt{\dfrac{6}{5}}$.



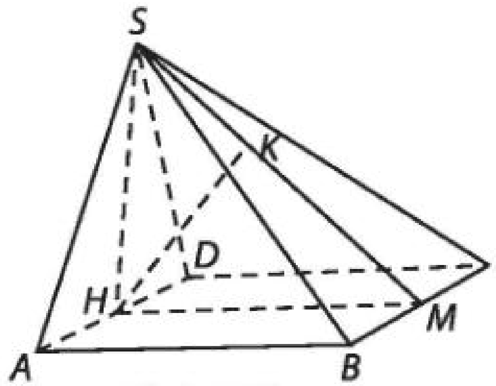
Hình 7.24

7.41. (H.7.25)

a) $SH \perp AD$ tại $H \Rightarrow SH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{6}$.

b) Ta có: $d(AD,SC) = d(AD,(SBC))$

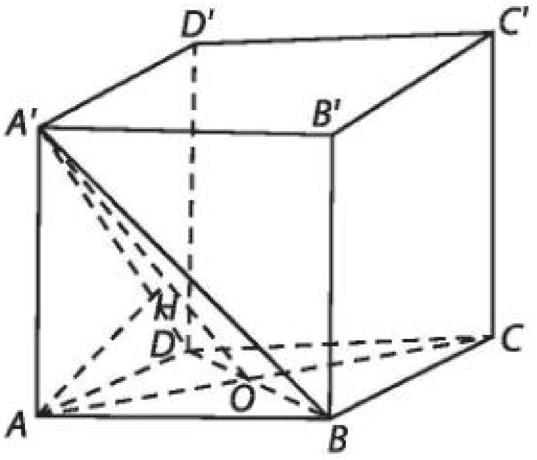
$= d(H,(SBC)) = d(H,SM) = HK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.



Hình 7.25

7.42. (H.7.26)

a) Ta có: $V = S_{ABCD}.AA' = a^2 \sin 60^\circ \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Hình 7.26

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Từ A kẻ AH vuông góc với $A'O$ tại H, thì AH vuông góc với $(A'BD)$, do đó $d\left(A,\left(A'BD\right)\right) = AH$.

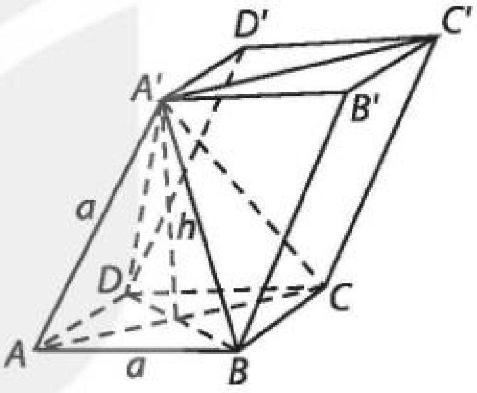
Xét tam giác $AA'O$ vuông tại A có đường cao AH nên

$$AH = \frac{AA' \cdot AO}{A'O} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

7.43. (H.7.27) Đường cao của hình lăng trụ là

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

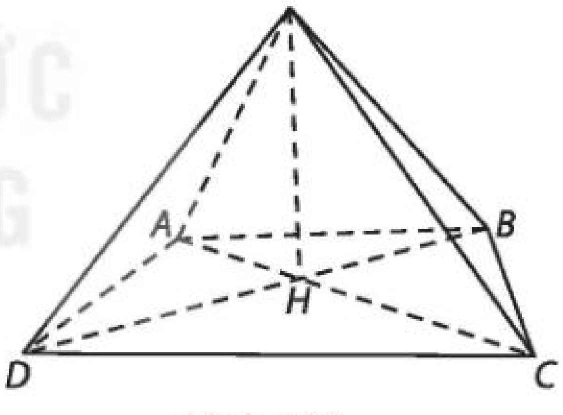
Khi đó $V_{A'.BCC'B'} = \dfrac{1}{3}V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Hình 7.27

7.44. (H.7.28) Gọi H là giao điểm của AC và BD thì $SH \perp (ABCD)$ và ta tính được:

$$SH = \frac{a\sqrt{15}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{5}}{4}.$$



Hình 7.28

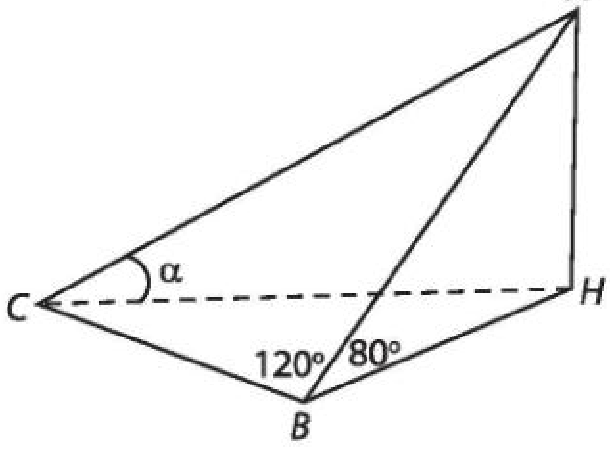
7.45. (H.7.29) Ta tính được $AC = 2\sqrt{91}$ m.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt đất,

ta tính được: $AH = 10\sin 80^\circ$ (m).

Góc cần tìm là

$$\alpha = \widehat{ACH} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{10\sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \alpha \approx 31^\circ.$$



Hình 7.29

Chương VIII. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

- Nếu biết xác suất xảy ra của biến cố *A*, xác suất xảy ra của biến cố *B*, làm thế nào để tính xác suất xảy ra biến cố *A* hoặc biến cố *B*; xác suất xảy ra biến cố *A* và biến cố *B*? Chương này đưa ra các quy tắc tính xác suất nhằm mục đích giúp ta trả lời câu hỏi đó.
- Các ví dụ, bài tập và ứng dụng của chương được lấy từ chính thực tế cuộc sống hoặc rất gần gũi với cuộc sống nhằm trang bị cho HS những kiến thức và kĩ năng để có thể giải quyết những bài toán tính xác suất thường gặp trong thực tế. Vì thế nội dung của chương mang tính ứng dụng cao, thể hiện triết lí của bộ sách là "Kết nối tri thức với cuộc sống".

2 Cấu tạo chương

Chương này gồm 3 bài học và 1 tiết ôn tập chương, được thực hiện trong 9 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 28. Biến cố hợp, biến cố giao, biến cố độc lập (3 tiết).

Bài 29. Công thức cộng xác suất (3 tiết).

Bài 30. Công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập (2 tiết).

Bài tập cuối chương VIII (1 tiết).

3 Một số điểm cần lưu ý

- Bài 28 có liên quan đến các phép toán trên tập hợp (Chương I, Toán 10, tập một). Vì vậy trước khi vào bài, GV cần ôn tập, củng cố lại cho HS các khái niệm này.
- Bài 29 và Bài 30 sử dụng công thức cộng, công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập để tính xác suất của biến cố hợp và biến cố giao. Ngoài ra còn sử dụng thêm phương pháp tổ hợp và sơ đồ hình cây. Vì thế chương này và Bài 27 (Chương IX, Toán 10, tập hai) có quan hệ rất mật thiết với nhau.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 28. BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được các khái niệm biến cố hợp, biến cố giao, biến cố độc lập.
- Diễn đạt được bằng lời khái niệm biến cố hợp, biến cố giao.
- Xác định được biến cố hợp, biến cố giao là tập con nào của không gian mẫu.
- Xác định được hai biến cố là độc lập hay không độc lập.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực giao tiếp toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cố gắng kết nối bài học trong sách với cuộc sống thực đang diễn ra.
- Phát huy tính tích cực của HS, khắc phục nhược điểm của phương pháp truyền thụ một chiều trước đây.
- Tăng cường các hoạt động và luyện tập trên lớp, tăng cường sự tương tác hai chiều giữa GV và HS.
- Sau khi kiến thức mới được hình thành và đóng khung trong hộp kiến thức, sẽ có ví dụ minh hoạ. Ví dụ đóng vai trò làm mẫu cho Luyện tập tiếp nối ngay sau Ví dụ.
- Các Hoạt động, Luyện tập được thực hiện ngay tại lớp. GV cho HS suy nghĩ 5 – 10 phút rồi hỏi xem HS trả lời. Nếu không có HS nào xung phong thì GV chỉ định một HS. GV sẽ thực hiện việc chữa bài Hoạt động, Luyện tập đó như sau: Nếu HS làm đúng, GV sẽ trình bày lại lời giải của HS đó cho rõ ràng và mạch lạc. Nếu HS đó sai, GV sẽ phân tích xem sai ở đâu. Trong mọi trường hợp, việc chữa bài Luyện tập đều rất có ích cho việc củng cố kiến thức mới.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết

+ Tiết 1: Mục 1. Biến cố hợp

+ Tiết 2: Mục 2. Biến cố giao

+ Tiết 3: Mục 3. Biến cố độc lập

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Nhu cầu mô tả mối liên hệ của các biến cố một cách cô đọng, súc tích bằng các khái niệm và kí hiệu toán học.	GV triển khai theo SGK.
1. BIẾN CỐ HỢP		
HĐ1	Khởi động cho việc hình thành khái niệm biến cố hợp.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS trả lời. *Gợi ý.* Ta có Ω = {Bảo, Dung, Định, Lan, Long, Hương, Phúc, Cường, Tuấn, Trang}. A = {Dung, Long, Cường, Trang}. B = {Lan, Hương, Phúc, Cường, Trang}. C = {Dung, Lan, Long, Hương, Phúc, Cường, Trang}. $A \cup B$ = {Dung, Long, Cường, Trang, Lan, Hương, Phúc}. GV có thể hỏi thêm: "Có nhận xét gì khi so sánh C với $A \cup B$?".
Khung kiến thức	Trình bày khái niệm biến cố hợp.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 1	Minh hoạ vận dụng khái niệm biến cố hợp.	GV trình bày Ví dụ 1.

Luyện tập 1	Vận dụng khái niệm biến cố hợp. Ví dụ 1 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 5 – 10 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Gợi ý.* a) Ω = {Hương, Hồng, Dung, Phương, Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải}. b) M: "Học sinh đó là một bạn nữ hoặc học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H". H = {Hương, Hồng, Dung, Phương}. K = {Hương, Hồng, Hoàng, Hải}. M = {Hương, Hồng, Dung, Phương, Hoàng, Hải}.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. BIẾN CỐ GIAO		
HĐ2	Khởi động cho việc hình thành khái niệm biến cố giao.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý.* a) D = {Cường, Trang}. b) $A \cap B$ = {Cường, Trang}.
Khung kiến thức	Trình bày khái niệm biến cố giao.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 2	Minh hoạ vận dụng khái niệm biến cố giao.	GV trình bày Ví dụ 2.
Luyện tập 2	Vận dụng khái niệm biến cố giao. Ví dụ 2 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 5 – 10 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Gợi ý.* a) Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4;...; 25\}$. b) S là biến cố: "Số ghi trên tấm thẻ chia hết cho cả 4 và 6".

		Ta có $P = \{4; 8; 12; 16; 20; 24\}$. $Q = \{6; 12; 18; 24\}$. $S = P \cap Q = \{12; 24\}$.
Vận dụng	Giải quyết câu hỏi đặt ra trong tình huống mở đầu.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý.* $E = M \cup N; F = MN$.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP		
HĐ3	Khởi động cho việc hình thành khái niệm hai biến cố độc lập.	GV cho HS suy nghĩ trong 3 phút rồi gọi HS lên trả lời. *Gợi ý.* Không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố B (hoặc biến cố A).
Khung kiến thức	Trình bày khái niệm hai biến cố độc lập.	GV triển khai theo SGK.
Chú ý	Đây là chú ý quan trọng, HS cần ghi nhớ.	GV triển khai theo SGK.
Ví dụ 3	Minh hoạ cách chứng tỏ hai biến cố độc lập.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 3	Chứng tỏ hai biến cố độc lập. Ví dụ 3 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 5 – 10 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Gợi ý.* Nếu B xảy ra: $P(E) = \frac{3}{6}$; nếu B không xảy ra: $P(E) = \frac{3}{6}$. Nếu E xảy ra: $P(B) = \frac{2}{6}$; nếu E không xảy ra $P(B) = \frac{2}{6}$. Vậy hai biến cố E và B độc lập.

3. Phân loại bài tập

- Biến cố hợp, biến cố giao: Bài tập 8.1, 8.2 và 8.3.
- Biến cố độc lập: Bài tập 8.4 và 8.5.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

8.1. a) $\Omega = \{1; 2;...; 15\}$.

b) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$.

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 11; 13\}$.

$AB = A \cap B = \{2; 3; 5\}$.

8.2. Nếu E hoặc F xảy ra thì K xảy ra. Ngược lại, nếu K xảy ra thì trong số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc phải có ít nhất một số chẵn: nếu cả hai số đều chẵn thì E xảy ra; nếu một số chẵn, một số lẻ thì F xảy ra. Nghĩa là nếu K xảy ra thì hoặc E xảy ra hoặc F xảy ra.

8.3. $P \cup Q$ là biến cố: "Học sinh đó hoặc bị cận thị hoặc học giỏi môn Toán".

PQ là biến cố: "Học sinh đó bị cận thị và học giỏi môn Toán".

$\overline{PQ}$ là biến cố: "Học sinh đó không bị cận thị và không học giỏi môn Toán".

8.4. Dù B xảy ra hay không xảy ra, ta luôn có $P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Dù A xảy ra hay không xảy ra, ta luôn có $P(B) = \frac{7}{10}$.

Vậy A và B là hai biến cố độc lập.

8.5. Nếu E xảy ra: Chuồng I có 9 con gà mái và 2 con gà trống. Sau khi bắt một con gà trống từ chuồng I và dồn số gà còn lại vào chuồng II thì chuồng II có $9 + 3 = 12$ con gà mái và $2 + 6 = 8$ con gà trống. Vậy $P(F) = \frac{12}{20}$.

Nếu E không xảy ra: Chuồng I có 8 con gà mái và 3 con gà trống. Sau khi bắt một con gà mái từ chuồng I và dồn số gà còn lại vào vào chuồng II thì chuồng II có $8 + 3 = 11$ con gà mái và $3 + 6 = 9$ con gà trống. Vậy $P(F) = \frac{11}{20}$.

Như vậy xác suất xảy ra của F đã thay đổi theo việc E xảy ra hay E không xảy ra.

Do đó hai biến cố E và F không độc lập.

Bài 29. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Vận dụng được công thức cộng để:
  - + Tính được xác suất của biến cố hợp của hai biến cố xung khắc.
  - + Tính được xác suất của biến cố hợp của hai biến cố bất kì.
- Biết sử dụng phương pháp tổ hợp khi vận dụng công thức cộng xác suất.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực giao tiếp toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cố gắng kết nối bài học trong sách với cuộc sống thực đang diễn ra.
- Phát huy tính tích cực của HS, khắc phục nhược điểm của phương pháp truyền thụ một chiều trước đây.
- Tăng cường các hoạt động và luyện tập trên lớp, tăng cường sự tương tác hai chiều giữa GV và HS.
- Sau khi kiến thức mới được hình thành và đóng khung trong hộp kiến thức, sẽ có ví dụ minh hoạ. Ví dụ đóng vai trò làm mẫu cho Luyện tập tiếp nối ngay theo Ví dụ.
- Các Hoạt động, Luyện tập được thực hiện ngay tại lớp. GV cho HS suy nghĩ 5 – 10 phút rồi hỏi xem HS trả lời. Nếu không có HS nào xung phong thì GV chỉ định một HS. GV sẽ thực hiện việc chữa bài Hoạt động, Luyện tập đó như sau: Nếu HS làm đúng, GV sẽ trình bày lại lời giải của HS đó cho rõ ràng và mạch lạc. Nếu HS đó sai, GV sẽ phân tích xem sai ở đâu. Trong mọi trường hợp, việc chữa bài Luyện tập đều rất có ích cho việc củng cố kiến thức mới.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết

+ Tiết 1: Mục 1. Công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc
+ Tiết 2: Mục 2. Công thức cộng xác suất
+ Tiết 3: Chữa bài tập cuối bài học

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Tình huống đặt ra nhu cầu cần có công thức cộng xác suất.	GV triển khai theo SGK.
1. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ XUNG KHẮC		
HĐ1	Khởi động cho việc hình thành khái niệm biến cố xung khắc.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý.* Không. Trong các số {1; 2; 3; 4; 5; 6} không có số nào chia hết cho 3 đồng thời chia hết cho 4.
Khung kiến thức	Trình bày khái niệm hai biến cố xung khắc.	GV triển khai theo SGK.
?	Chứng tỏ hai biến cố xung khắc bằng cách chỉ ra hai tập hợp không giao nhau.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 3 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý.* Có, vì A và $\overline{A}$ không giao nhau.
Ví dụ 1	Minh hoạ cách chứng tỏ hai biến cố xung khắc	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1	Chứng tỏ hai biến cố xung khắc. Ví dụ 1 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 5 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm. *Gợi ý.* Hai biến cố E và F không xung khắc vì nếu chọn được bạn thích cả môn Cầu lông và môn Bóng đá thì cả E và F đều xảy ra.
HĐ2	Khởi động cho việc hình thành công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý.* $A = \{3; 6\}$; $B = \{4\}$; $A \cup B = \{3; 4; 6\}$. $P(A) = \frac{2}{6}; P(B) = \frac{1}{6}; P(A \cup B) = \frac{3}{6}.$
Khung kiến thức	Trình bày công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc.	GV triển khai theo SGK.

Ví dụ 2	Minh hoạ cách vận dụng công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc, kết hợp với phương pháp tổ hợp.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2	Vận dụng công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc, kết hợp với phương pháp tổ hợp. Ví dụ 2 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 10 – 15 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Gợi ý*. Xét các biến cố *A*: “Chọn được cả hai quả cầu màu xanh”, *B*: “Chọn được cả hai quả cầu màu đỏ”. Biến cố *C*: “Hai quả cầu có cùng màu” là biến cố hợp của *A* và *B*. Hai biến cố *A* và *B* là xung khắc nên $P(C) = P(A) + P(B)$. $n(\Omega) = \mathrm{C}_8^2 = 28$, $n(A) = \mathrm{C}_5^2 = 10$. Do đó $P(A) = \frac{10}{28}$. $n(B) = \mathrm{C}_3^2 = 3$. Do đó $P(B) = \frac{3}{28}$. Vậy $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{10}{28} + \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT		
HĐ3	Khởi động cho việc hình thành công thức cộng xác suất cho hai biến cố bất kì.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 5 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý*. a) $P(A)$ là tỉ lệ học sinh học khá môn Ngữ văn. $P(B)$ là tỉ lệ học sinh học khá môn Toán. $P(AB)$ là tỉ lệ học sinh học khá cả môn Ngữ văn và môn Toán. $P(A \cup B)$ là tỉ lệ học sinh học khá môn Ngữ văn hoặc học khá môn Toán. b) Vì hai biến cố *A* và *B* không xung khắc.

Khung kiến thức	Trình bày công thức cộng xác suất cho hai biến cố bất kì (không nhất thiết xung khắc).	GV triển khai theo SGK.
?	Liên hệ với công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 3 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý.* Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $AB = \varnothing$ mà $P(\varnothing) = 0$.
Ví dụ 3	Minh hoạ cách vận dụng công thức cộng xác suất cho hai biến cố không xung khắc.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 3	Vận dụng công thức cộng xác suất cho hai biến cố không xung khắc. Ví dụ 3 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 10 – 15 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Gợi ý.* Xét các biến cố A: “Học sinh đó thích môn Bóng đá”, B: “Học sinh đó thích môn Bóng bàn”. Biến cố E: “Học sinh đó thích ít nhất một trong hai môn Bóng đá hoặc Bóng bàn” là biến cố hợp của A và B. Theo công thức cộng: $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Ta có $P(A) = \dfrac{19}{30}$; $P(B) = \dfrac{17}{30}$; $P(AB) = \dfrac{15}{30}$. Thay vào ta được: $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $= \dfrac{19}{30} + \dfrac{17}{30} - \dfrac{15}{30} = \dfrac{21}{30} = 0{,}7$.
Vận dụng	Giải bài toán đặt ra trong tình huống mở đầu.	Theo công thức xác suất của biến cố đối: $$P(E) = 1 - P(\overline{E}).$$ Theo công thức cộng xác suất ta có: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Do đó: $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(A \cup B)$ $= 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$.

		Dữ liệu bài toán cho ta: $P(A) = 8{,}2\% = 0{,}082; P(B) = 12{,}5\% = 0{,}125;$ $P(AB) = 5{,}7\% = 0{,}057.$ Thay giá trị của $P(A)$, $P(B)$ và $P(AB)$ vào ta được: $P(E) = 1 - 0{,}082 - 0{,}125 + 0{,}057 = 0{,}85.$ Vậy xác suất để người đó không mắc cả bệnh tim và bệnh huyết áp là 0,85. Điều đó có nghĩa là có 85% dân cư trên 50 tuổi của tỉnh X không có cả bệnh tim và bệnh huyết áp.

Tiết 3. Chữa bài tập cuối bài học

3. Phân loại bài tập

- Quy tắc cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc: Bài tập 8.6.
- Quy tắc cộng xác suất cho hai biến cố bất kì và quy tắc tính xác suất của biến cố đối: Bài tập 8.7, 8.8, 8.9 và 8.10.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

8.6. Gọi A là biến cố: "Bạn Sơn lấy được viên bi xanh và bạn Tùng lấy được viên bi xanh", B là biến cố: "Bạn Sơn lấy được viên bi đỏ và bạn Tùng lấy được viên bi xanh".

Biến cố: "Bạn Tùng lấy được viên bi xanh" chính là biến cố $A \cup B$. Do A và B xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Mỗi kết quả có thể là một bộ (a; b) trong đó a là viên bi bạn Sơn chọn; b là viên bi bạn Tùng chọn.

a có 14 cách chọn. b có 13 cách chọn. Do đó theo quy tắc nhân số bộ (a; b) là $14 \cdot 13 = 182$. Vậy $n(\Omega) = 182$.

+ Tính $P(A)$:

Bạn Sơn có 8 cách chọn được viên bi xanh. Bạn Tùng có 7 cách chọn được viên bi xanh.

Do đó $n(A) = 8 \cdot 7 = 56$. Vậy $P(A) = \dfrac{56}{182}$.

+ Tính $P(B)$:

Bạn Sơn có 6 cách chọn được viên bi đỏ. Bạn Tùng có 8 cách chọn được viên bi xanh.

Do đó $n(B) = 6 \cdot 8 = 48$. Vậy $P(B) = \dfrac{48}{182}$.

Vậy $P(A \cup B) = \dfrac{56}{182} + \dfrac{48}{182} = \dfrac{104}{182}$.

8.7. Gọi A là biến cố: "Bạn đó thích nhạc cổ điển"; B là biến cố: "Bạn đó thích nhạc trẻ"; AB là biến cố: "Bạn đó thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ".

Ta có $n(A) = 14$, suy ra $P(A) = \frac{14}{40}$.

$n(B) = 13$, suy ra $P(B) = \frac{13}{40}$.

$n(AB) = 5$, suy ra $P(AB) = \frac{5}{40}$.

a) Gọi E là biến cố: "Bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ". Ta có $E = A \cup B$.

Vậy $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{14}{40} + \frac{13}{40} - \frac{5}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$.

b) Gọi F là biến cố: "Bạn đó không thích cả nhạc cổ điển lẫn nhạc trẻ". Khi đó F là biến cố đối của E. Vậy $P(F) = 1 - P(E) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$.

8.8. Gọi A là biến cố: "Hộ đó nuôi chó"; B là biến cố: "Hộ đó nuôi mèo".

AB là biến cố: "Hộ đó nuôi cả chó và mèo". Ta có:

$n(A) = 18$, suy ra $P(A) = \frac{18}{50}$.

$n(B) = 16$, suy ra $P(B) = \frac{16}{50}$.

$n(AB) = 7$, suy ra $P(AB) = \frac{7}{50}$.

a) Gọi E là biến cố: "Hộ đó nuôi chó hoặc nuôi mèo". Ta có $E = A \cup B$.

Vậy $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{18}{50} + \frac{16}{50} - \frac{7}{50} = \frac{27}{50}$.

b) Gọi F là biến cố: "Hộ đó không nuôi cả chó và mèo". F là biến cố đối của biến cố E.

Vậy $P(F) = 1 - P(E) = 1 - \frac{27}{50} = \frac{23}{50}$.

8.9. Gọi A là biến cố: "Người đó mua sách A", B là biến cố: "Người đó mua sách B". Ta có: $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}7$; $P(AB) = 0{,}3$.

a) Gọi E là biến cố: "Người đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B", khi đó $E = A \cup B$. Vậy $P(E) = P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}9$.

b) Gọi F là biến cố: "Người đó không mua cả sách A và sách B". F là biến cố đối của biến cố E. Vậy $P(F) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

8.10. Chọn ngẫu nhiên một giáo viên môn Toán THPT của tỉnh X. Ta tính xác suất để giáo viên đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B.

Xét biến cố *A*: "Giáo viên đó tham khảo bộ sách giáo khoa A", biến cố *B*: "Giáo viên đó tham khảo bộ sách giáo khoa B".

Ta có $P(A) = 63\% = 0,63$; $P(B) = 56\% = 0,56$; $P(AB) = 28,5\% = 0,285$.

Gọi *E* là biến cố: "Giáo viên đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B". Biến cố đối $\overline{E}$: "Giáo viên đó tham khảo hoặc bộ sách giáo khoa A hoặc bộ sách giáo khoa B" là biến cố hợp của *A* và *B*, khi đó $\overline{E} = A \cup B$.

Theo công thức xác suất của biến cố đối ta có $P(E) = 1 - P(\overline{E})$.

Theo công thức cộng xác suất ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Do đó $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$.

Thay giá trị của $P(A)$, $P(B)$ và $P(AB)$ vào ta được

$$P(E) = 1 - 0,63 - 0,56 + 0,285 = 0,095.$$

Vậy xác suất để giáo viên đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B là 0,095.

Suy ra 9,5% giáo viên môn Toán các trường THPT của tỉnh X không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B.

Bài 30. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Tính được xác suất của biến cố giao của hai biến cố độc lập bằng cách sử dụng công thức nhân và sơ đồ hình cây.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực giao tiếp toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cố gắng kết nối bài học trong sách với cuộc sống thực đang diễn ra.
- Phát huy tính tích cực của HS, khắc phục nhược điểm của phương pháp truyền thụ một chiều trước đây.
- Tăng cường các hoạt động và luyện tập trên lớp, tăng cường sự tương tác hai chiều giữa GV và HS.
- Sau khi kiến thức mới được hình thành và đóng khung trong hộp kiến thức, sẽ có ví dụ minh hoạ. Ví dụ đóng vai trò làm mẫu cho Luyện tập tiếp nối ngay theo Ví dụ.
- Các Hoạt động, Luyện tập được thực hiện ngay tại lớp. GV cho HS suy nghĩ 5 – 10 phút rồi hỏi xem HS trả lời. Nếu không có HS nào xung phong thì GV chỉ định một HS. GV sẽ thực hiện việc chữa bài Hoạt động, Luyện tập đó như sau: Nếu HS làm đúng, GV sẽ trình bày lại lời giải của HS đó cho rõ ràng và mạch lạc. Nếu HS đó sai, GV sẽ phân tích xem sai ở đâu. Trong mọi trường hợp, việc chữa bài Luyện tập đều rất có ích cho việc củng cố kiến thức mới.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết

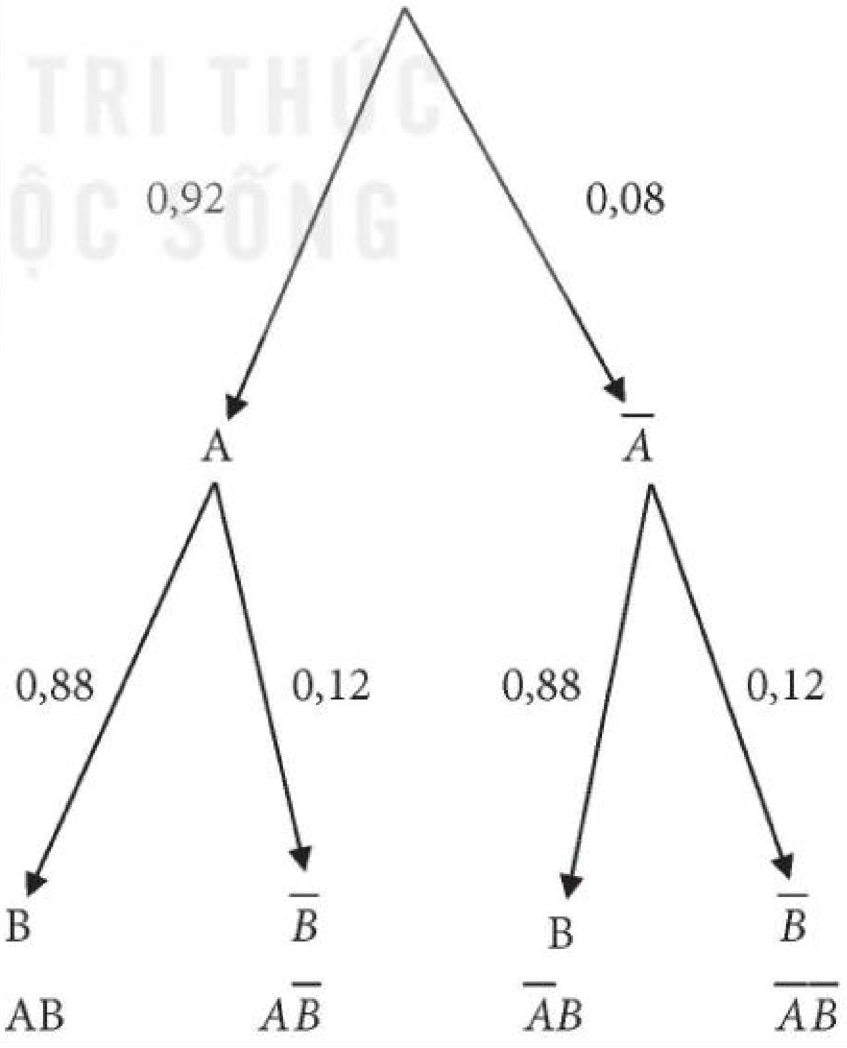
+ Tiết 1: Mục 1. Công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập

+ Tiết 2: Mục 2. Vận dụng

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Tình huống đặt ra nhu cầu cần có công thức nhân xác suất.	GV triển khai theo SGK.
1. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP		
HĐ1	Khởi động cho việc hình thành công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 10 phút rồi chỉ định một HS lên trả lời. *Gợi ý.* a) Dễ thấy $P(A)=\dfrac{6}{10}$; $P(B)=\dfrac{7}{8}$. Tính $P(AB)$: $n(\Omega)=10\cdot 8=80$; $n(AB)=6\cdot 7=42$, suy ra $P(AB)=\dfrac{42}{80}$. b) Ta có $P(AB)=P(A)P(B)$.

Khung kiến thức	Trình bày công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập.	GV triển khai theo SGK.
?	Ôn tập kiến thức hai biến cố độc lập.	Dù biến cố A có xảy ra hay không ta đều có $P(B)=\frac{7}{8}$. Dù biến cố B có xảy ra hay không ta đều có $P(A)=\frac{6}{10}$. Vậy hai biến cố A và B độc lập.
Ví dụ 1	Minh hoạ cách vận dụng công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập, kết hợp với việc sử dụng sơ đồ hình cây.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 1	Vận dụng công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập. Ví dụ 1 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 10 – 15 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Gợi ý*. Gọi A là biến cố: “Hạt A nảy mầm”; B là biến cố: “Hạt B nảy mầm”. Ta có sơ đồ hình cây như sau:  0,92 0,08 A $\overline{A}$ 0,88 0,12 0,88 0,12 B $\overline{B}$ B $\overline{B}$ AB $A\overline{B}$ $\overline{A}B$ $\overline{AB}$

		$P(A) = 0{,}92$; $P(B) = 0{,}88$. Ta có hai biến cố A và B độc lập. a) Biến cố: "Hạt A nảy mầm, hạt B không nảy mầm" là biến cố $A\overline{B}$. Vậy $P(A\overline{B}) = 0{,}92 \cdot 0{,}12 = 0{,}1104$. b) Biến cố: "Hạt A không nảy mầm, hạt B nảy mầm" là biến cố $\overline{A}B$. Vậy $P(\overline{A}B) = 0{,}08 \cdot 0{,}88 = 0{,}0704$. c) Biến cố: "Có ít nhất một trong hai hạt nảy mầm" là biến cố $A \cup B$. Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ $= 0{,}92 + 0{,}88 - 0{,}92 \cdot 0{,}88 = 0{,}9904$.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. VẬN DỤNG		
Ví dụ 2	Minh hoạ cách vận dụng hệ quả trên vào một tình huống thực tế.	GV triển khai theo SGK.
Luyện tập 2	Vận dụng hệ quả trên vào một tình huống thực tế. Ví dụ 2 đóng vai trò làm mẫu.	HS tự làm (trong 10 – 15 phút). GV gọi HS lên bảng. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Gợi ý.* Chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm 5 000 người đang xét. Xét các biến cố sau: A: "Người đó nghiện thuốc lá", B: "Người đó mắc bệnh viêm phổi". Khi đó AB là biến cố: "Người đó nghiện thuốc lá và mắc bệnh viêm phổi". Số người nghiện thuốc lá là: 752 + 1 236 = 1 988.

		Số người mắc bệnh viêm phổi là: $752 + 575 = 1\,327.$ Số người nghiện thuốc lá và mắc bệnh viêm phổi là 752. Ta có $P(A) = \frac{1\,988}{5\,000}$; $P(B) = \frac{1\,327}{5\,000}$; $P(AB) = \frac{752}{5\,000}.$ $P(A)P(B) = \frac{1\,988}{5\,000} \cdot \frac{1\,327}{5\,000} \neq \frac{752}{5\,000} = P(AB).$ Vậy hai biến cố A và B không độc lập. Do đó ta kết luận việc nghiện thuốc lá và mắc bệnh viêm phổi có liên quan với nhau.

3. Phân loại bài tập

- Chứng tỏ hai biến cố không độc lập bằng quy tắc nhân xác suất cho hai biến cố độc lập: Bài tập 8.11, 8.12.
- Áp dụng quy tắc nhân xác suất cho hai biến cố độc lập, quy tắc cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc và quy tắc tính xác suất của biến cố đối: Bài tập 8.13.
- Áp dụng quy tắc nhân xác suất cho hai biến cố độc lập và quy tắc cộng xác suất: Bài tập 8.14, 8.15.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

8.11. Ta có $P(A)P(B) > 0$; $P(AB) = 0$. Do đó $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

Vậy hai biến cố A và B không độc lập.

8.12. a) Ta có $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$.

$AB = A \cap B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Suy ra

$$P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5};\ P(B) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6};\ P(AB) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

b) Ta có $P(A)P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$

$$P(AB) = \frac{1}{10} \neq \frac{1}{30} = P(A)P(B).$$

Do đó hai biến cố A và B không độc lập.

8.13. a) Gọi *A* là biến cố: "Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh". Gọi A_1 là biến cố: "Viên bi lấy ra từ túi I có màu xanh", A_2 là biến cố: "Viên bi lấy ra từ túi II có màu xanh".

Ta có $A = A_1A_2$. Hai biến cố A_1 và A_2 độc lập nên $P(A) = P(A_1)P(A_2)$.

Dễ thấy $P\left(A_1\right) = \frac{3}{10}$; $P\left(A_2\right) = \frac{10}{16}$. Suy ra $P\left(A\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{16} = \frac{30}{160}$.

b) Gọi *B* là biến cố: "Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ". Gọi B_1 là biến cố: "Viên bi lấy ra từ túi I có màu đỏ", B_2 là biến cố: "Viên bi lấy ra từ túi II có màu đỏ".

Ta có $B = B_1B_2$. Hai biến cố B_1 và B_2 độc lập nên

$$P\left(B\right) = P\left(B_1\right)P\left(B_2\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{16} = \frac{42}{160}.$$

c) Gọi *E* là biến cố: "Hai viên bi lấy ra cùng màu". Ta có $E = A \cup B$. Hai biến cố *A* và *B* xung khắc nên $P(E) = P(A) + P(B)$.

Vậy $P\left(E\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) = \frac{30}{160} + \frac{42}{160} = \frac{72}{160} = \frac{9}{20}$.

d) Gọi *F* là biến cố: "Hai viên bi lấy ra không cùng màu". Ta có $F = \overline{E}$.

Vậy $P(F) = P\left(\overline{E}\right) = 1 - P\left(E\right) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$.

8.14. Gọi *A* là biến cố: "Hai quả cầu lấy ra không có quả cầu nào mang số 1", A_1 là biến cố: "Quả cầu lấy ra từ túi I không mang số 1", A_2 là biến cố: "Quả cầu lấy ra từ túi II không mang số 1".

Ta có $A = A_1A_2$. Hai biến cố A_1 và A_2 độc lập nên $P(A) = P(A_1)P(A_2)$.

Dễ thấy $P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = \frac{9}{10} = 0{,}9$. Vậy $P\left(A\right) = (0{,}9)^2$.

Gọi *B* là biến cố: "Hai quả cầu lấy ra không có quả cầu nào mang số 5". Tương tự, ta có $P(B) = (0{,}9)^2$.

Gọi *E* là biến cố: "Trong hai quả cầu lấy ra không có quả cầu nào mang số 1 hoặc số 5". Ta có $E = A \cup B$.

Theo công thức cộng xác suất ta có $P(E) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Gọi *AB* là biến cố: "Hai quả cầu lấy ra không có quả cầu nào mang số 1 và mang số 5", H_1 là biến cố: "Quả cầu lấy ra từ túi I không mang số 1 và mang số 5", H_2 là biến cố: "Quả cầu lấy ra từ túi II không mang số 1 và mang số 5". Ta có $AB = H_1\,H_2$.

Hai biến cố H_1 và H_2 độc lập nên $P(AB) = P(H_1)P(H_2)$.

Dễ thấy $P\left(H_1\right) = P\left(H_2\right) = \frac{8}{10} = 0{,}8$. Từ đó $P\left(AB\right) = 0{,}8^2 = 0{,}64$.

Vậy $P(E) = 0{,}81 + 0{,}81 - 0{,}64 = 0{,}98$.

8.15. Gọi A là biến cố: "Học sinh tỉnh X đạt yêu cầu".

B là biến cố: "Học sinh tỉnh Y đạt yêu cầu".

a) $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}93 \cdot 0{,}87 = 0{,}8091$.

b) $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})\, P(\overline{B}) = 0{,}07 \cdot 0{,}13 = 0{,}0091$.

c) $P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) = 0{,}07 \cdot 0{,}87 + 0{,}93 \cdot 0{,}13 = 0{,}1818$.

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}93 + 0{,}87 - 0{,}8091 = 0{,}9909$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương (có thể chuẩn bị slides dạng sơ đồ hoá).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

8.16. $A \cup B = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 18; 20\}$. Đáp án A.

8.17. $AB = A \cap B = \{10; 12; 14\}$. Đáp án C.

8.18. Xét các biến cố A: "Người đó thành thạo tiếng Anh", B: "Người đó thành thạo tiếng Pháp".

Biến cố E: "Người đó thành thạo ít nhất một trong hai thứ tiếng Anh hoặc Pháp" là biến cố hợp của A và B.

Theo công thức cộng ta có $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Ta có $P(A) = \frac{31}{50}; P(B) = \frac{21}{50}; P(AB) = \frac{5}{50}$.

Thay vào ta được $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{31}{50} + \frac{21}{50} - \frac{5}{50} = \frac{47}{50}$.

Đáp án A.

8.19. Biến cố *F*: "Người đó không thành thạo cả hai thứ tiếng Anh hay Pháp" là biến cố đối của biến cố *E*.

Vậy $P(F)=P(\overline{E})=1-P(E)=1-\frac{47}{50}=\frac{3}{50}$.

Đáp án B.

8.20. Gọi *A* là biến cố: "Học sinh đó thích bóng chuyền", *B* là biến cố: "Học sinh đó thích bóng rổ". Ta có $P(A)=\frac{23}{40}, P(B)=\frac{18}{40}, P(A\cup B)=\frac{26}{40}$.

Gọi *E* là biến cố: "Học sinh đó không thích bóng chuyền lẫn bóng rổ". Biến cố đối $\overline{E}$ là "Học sinh đó thích bóng chuyền hoặc bóng rổ".

Vậy $\overline{E}=A\cup B$, suy ra

$$P(E)=1-P(A\cup B)=1-\frac{26}{40}=\frac{14}{40}.$$

Đáp án B.

8.21. Ta có $P(A)=\frac{23}{40}, P(B)=\frac{18}{40}, P(A\cup B)=\frac{26}{40}$, suy ra

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{23}{40}+\frac{18}{40}-\frac{26}{40}=\frac{15}{40}$.

$A=AB\cup A\overline{B}$, suy ra $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$. Do đó:

$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{23}{40}-\frac{15}{40}=\frac{8}{40}$.

Đáp án C.

8.22. $C=M\cup N, D=MN, E=\overline{M}\overline{N}, F=M\overline{N}, G=M\overline{N}\cup\overline{M}N$.

8.23. Xét các biến cố *A*: "Người đó đến từ Hà Nội", *B*: "Người đó đến từ Hải Phòng".

Biến cố *E*: "Người đó hoặc đến từ Hà Nội hoặc đến từ Hải Phòng" là biến cố hợp của *A* và *B*. Hai biến cố *A* và *B* xung khắc vì một người không thể đến từ hai nơi.

Vậy $P(E)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{31}+\frac{5}{31}=\frac{12}{31}$.

8.24. Ta có: $A=\{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6)\}$; $B=\{(1,2); (2,2); (3,2); (4,2); (5,2); (6,2)\}$.

Suy ra $P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$.

Ta có: $C=\{(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)\}$. Suy ra $P(C)=\frac{5}{36}$.

$D = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$. Suy ra $P(D) = \frac{1}{6}$.

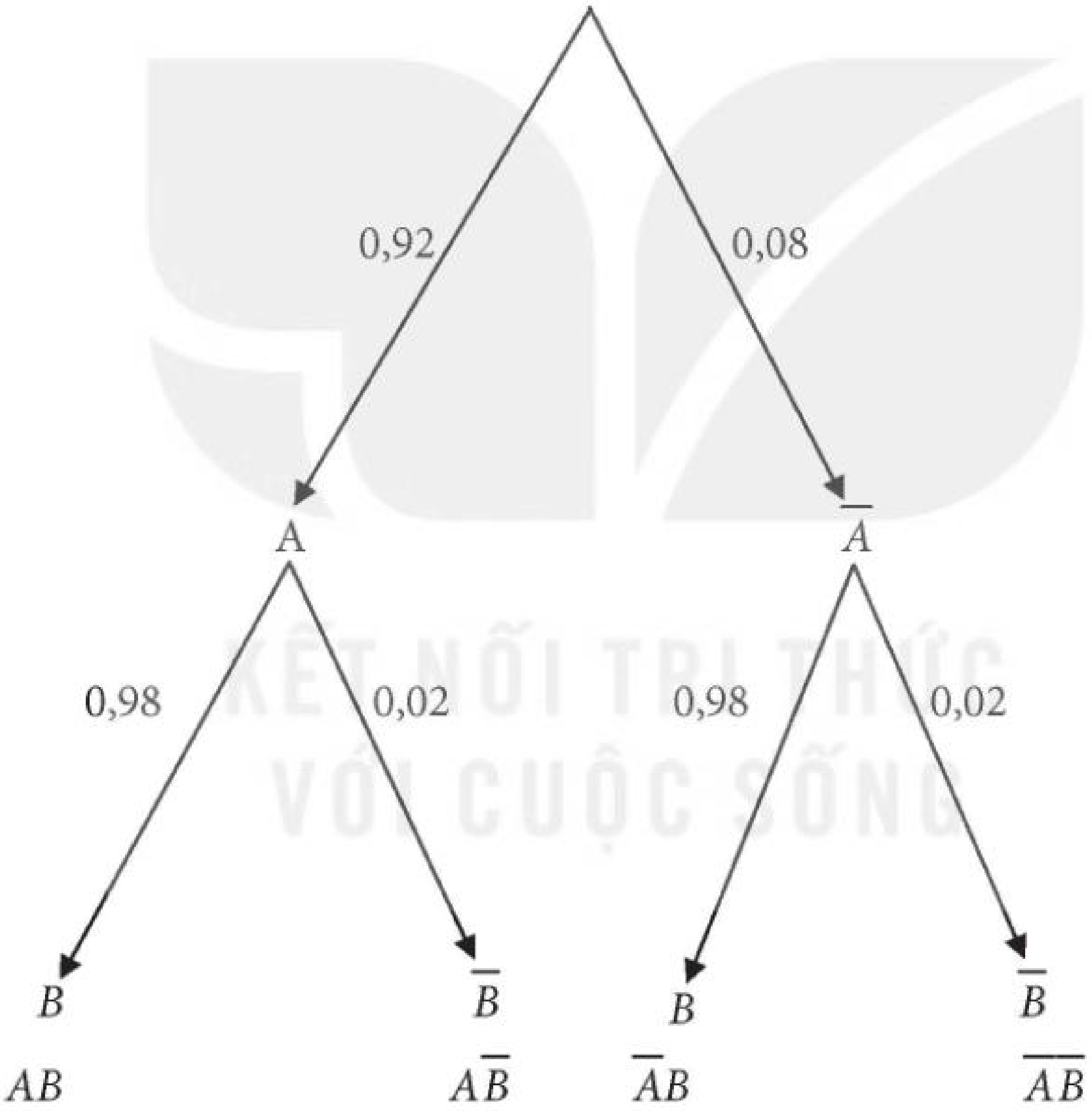
Ta có $AC = \varnothing$; $CD = \varnothing$; $BC = \{(6,2)\}$. Suy ra $P(CD) = 0$; $P(AC) = 0$; $P(BC) = \frac{1}{36}$.

Từ đó ta thấy $P(AC) \neq P(A)P(C)$; $P(BC) \neq P(B)P(C)$; $P(CD) \neq P(C)P(D)$.

Vậy các cặp biến cố (A,C); (B,C); (C,D) không độc lập.

8.25. a) Gọi A là biến cố: "Chuyến bay của hãng X khởi hành đúng giờ" và B là biến cố: "Chuyến bay của hãng Y khởi hành đúng giờ". Từ giả thiết ta có A và B là hai biến cố độc lập.

Vẽ sơ đồ hình cây:


0,92
0,08
A
$\overline{A}$
0,98
0,02
0,98
0,02
B
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$
AB
$A\overline{B}$
$\overline{A}B$
$\overline{AB}$

a) $P(AB) = 0,92 \cdot 0,98 = 0,9016$.

b) Gọi M là biến cố: "Chỉ có một chuyến bay khởi hành đúng giờ". $M = A\overline{B} \cup \overline{A}B$, do đó $P(M) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$.

Ta có $P(A\overline{B}) = 0,92 \cdot 0,02 = 0,0184$; $P(\overline{A}B) = 0,08 \cdot 0,98 = 0,0784$.

Suy ra $P(M) = 0,0184 + 0,0784 = 0,0968$.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,92 + 0,98 - 0,9016 = 0,9984$.

Chương IX. ĐẠO HÀM

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chương

- Mục đích chính của chương này là xây dựng khái niệm đạo hàm, các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương hai hàm số, đạo hàm của hàm số hợp và công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản. Đây là công cụ và chất liệu cơ bản cho việc trình bày ứng dụng của đạo hàm trong việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ở lớp 12, cũng như cho phép đề cập đến những ứng dụng phong phú của đạo hàm trong các bài toán thực tiễn. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản trong chương này cũng là cơ sở để xây dựng bảng các nguyên hàm cơ bản ở phần Giải tích lớp 12, là cơ sở cho việc tính nguyên hàm và tích phân.
- Ngoài ra, để phục vụ việc học tập các môn học khác, chẳng hạn môn Vật lí, bên cạnh khái niệm đạo hàm cấp một, chương này còn trình bày sơ lược khái niệm và ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.

2 Cấu tạo chương

- Tổng thời lượng: 7 tiết.
- Nội dung:

  Bài 31. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm (2 tiết)
  Bài 32. Các quy tắc tính đạo hàm (3 tiết)
  Bài 33. Đạo hàm cấp hai (1 tiết)
  Bài tập cuối chương IX (1 tiết)

3 Một số điểm cần lưu ý

- Theo tinh thần chung của Chương trình GDPT môn Toán năm 2018 là giảm tính hàn lâm, những bài tập nội dung thuần tuý toán về đạo hàm và đạo hàm cấp hai được giảm nhẹ nhiều. Nói riêng, theo quy định của Chương trình, SGK không đề cập đến hàm số luỹ thừa tổng quát và đạo hàm của nó, cũng như không đề cập đến đạo hàm cấp cao.

  Bên cạnh việc giảm tính hàn lâm và giảm mức độ của các bài tập thuần tuý toán, một điểm mới trong SGK Toán 11 mới này là những ứng dụng thực tế của đạo hàm được nhấn mạnh. Điều này thể hiện rất rõ trong những bài toán ở Tình huống mở đầu, Vận dụng và những bài tập thực tiễn được trình bày trong SGK. Đây có thể coi là một khác biệt cơ bản so với các SGK Toán 11 trước đây.

- Theo yêu cầu của Chương trình mới, HS nên được tham gia tích cực vào các hoạt động trong bài học, từ các hoạt động hình thành kiến thức mới đến các hoạt động luyện tập, vận dụng. SGK đã cố gắng thiết kế các hoạt động tương ứng. GV chỉ nên gợi ý, hướng dẫn cho HS (nếu cần) trong các hoạt động này, hạn chế việc làm thay (hoàn toàn) cho HS.
- Về hình thức dạy học:
  + Nếu có điều kiện thì GV nên chuẩn bị sẵn slides phần đề bài của các hoạt động. Đến hoạt động nào thì trình chiếu yêu cầu của hoạt động đó lên cho HS theo dõi và thực hiện. Việc này vừa tiết kiệm thời gian viết bảng, vừa sinh động hơn và làm HS tập trung hơn vào yêu cầu của GV.
  + Với mỗi hoạt động, có thể cho HS làm việc cá nhân hoặc hoạt động nhóm (tuỳ tính chất của hoạt động). Sau đó yêu cầu HS trình bày câu trả lời (bằng miệng, giơ bảng trả lời, viết bảng). GV nhận xét và tổng kết, đặc biệt lưu ý phương pháp giải và các sai lầm thường mắc.
  + Với các ví dụ đơn giản trong bài học, GV có thể để HS tự làm và chỉ gợi ý khi cần. Tuy nhiên, với các ví dụ phức tạp hơn, thì có thể xử lí tuỳ theo trình độ chung của HS trong lớp. Nếu ở lớp HS khá, GV chỉ cần phân tích đề bài, gợi ý để HS có thể tự làm sau đó sẽ nhận xét và tổng kết phương pháp giải. Còn ở lớp với trình độ chung của HS không tốt, GV có thể chữa mẫu và phân tích kĩ cách giải (theo lược đồ 4 bước của Polya). Sau đó yêu cầu HS làm các bài tập tương tự trong phần Luyện tập, Vận dụng, GV quan sát và trợ giúp HS khi cần.
- Trong mỗi bài học, các gợi ý dạy học và dự kiến thời gian tương ứng cho từng phần của bài học chỉ là một phương án đề xuất. GV có thể dựa trên kinh nghiệm giảng dạy của mình và trình độ chung của HS trong lớp để có thể có phương án hợp lí hơn, miễn là đảm bảo mục tiêu của bài học và HS được tham gia tích cực vào các hoạt động.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 31. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được định nghĩa của đạo hàm.

- Tính được đạo hàm của một số hàm số đơn giản bằng định nghĩa.
- Thiết lập được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị.
- Vận dụng được định nghĩa đạo hàm vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua những bài toán thực tiễn liên quan đến khái niệm đạo hàm.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, không có nhiều khác biệt giữa cách trình bày khái niệm đạo hàm ở đây và SGK Toán 11 trước đây. Tuy nhiên, theo tinh thần của Chương trình mới, chúng tôi nhấn mạnh đến ứng dụng của đạo hàm trong các bài toán thực tế và giảm nhẹ mức độ của các bài tập thuần tuý toán liên quan đến khái niệm đạo hàm. Nói riêng, để giảm bớt tính hàn lâm theo tinh thần của Chương trình, chúng tôi không đưa vào các khái niệm như số gia của đối số, số gia của hàm số, mà định nghĩa trực tiếp đạo hàm $f'(x_0)$ là giới hạn hữu hạn (nếu tồn tại) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ luôn. Hơn nữa, để thuận lợi khi xây dựng công thức tính đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản ở Bài 33, trong Chú ý ở trang 31 chúng tôi đưa ra một cách viết khác của định nghĩa đạo hàm là $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ưu điểm của cách viết này là chuyển quá trình $x \to x_0$ bất kì về quá trình $h \to 0$, là quá trình mà ta có nhiều đẳng thức giới hạn đã biết, do đó việc tính giới hạn này sẽ thuận lợi hơn trong nhiều trường hợp.
- Ở đây, cũng như trong SGK Toán 11 trước đây bộ Nâng cao, khái niệm tiếp tuyến của đồ thị hàm số (của một hàm số có đạo hàm) tại một điểm được định nghĩa một cách chặt chẽ (tức là giải thích tường minh thế nào là vị trí "giới hạn" của cát tuyến). Đó là đường thẳng đi qua điểm $(x_0; f(x_0))$ thuộc đồ thị và có hệ số góc là $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, tức là $k = f'(x_0)$. Điều này giúp giải thích một cách chặt chẽ ý nghĩa hình học của đạo hàm và cho ta ngay phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm.

- Trong phần Em có biết? ở cuối bài, SGK giới thiệu ý nghĩa tổng quát của đạo hàm là mô tả tốc độ thay đổi tức thời của một đại lượng biến thiên. Với HS khá giỏi, GV có thể hướng dẫn HS tìm hiểu vấn đề này.
- Chuẩn bị:
  + GV: Chuẩn bị thông tin về một số mô hình thực tế liên quan đến ứng dụng của đạo hàm (vận tốc tức thời, cường độ tức thời, hệ số góc của tiếp tuyến,...). Nếu có điều kiện, có thể chuẩn bị phần mềm/video minh hoạ cho sự thay đổi vị trí của cát tuyến dẫn đến vị trí tiếp tuyến tương ứng của một đồ thị.
  + HS: Ôn lại kiến thức và kĩ năng tính giới hạn của hàm số, đặc biệt là kĩ năng khử dạng vô định $\frac{0}{0}$. Xem lại các khái niệm vận tốc, điện lượng, phương trình chuyển động của vật rơi tự do đã được học trong Vật lí.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 2 tiết.

+ Tiết 1: Mục 1. Một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm
Mục 2. Đạo hàm của hàm số tại một điểm
Mục 3. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng
+ Tiết 2: Mục 4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm
Gợi ý chữa một số bài tập cuối bài học

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

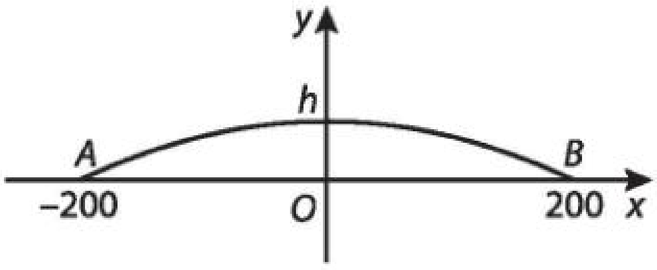
HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM		
HĐ1. Nhận biết khái niệm vận tốc tức thời của	Giới thiệu cho HS khái niệm vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1.

một vật chuyển động thẳng		
HĐ2. Nhận biết khái niệm cường độ tức thời trong Vật lí	Giới thiệu cho HS khái niệm cường độ tức thời của dòng điện.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2. Từ đó GV cho HS thấy nhiều bài toán trong thực tế và trong khoa học dẫn đến xét cùng một kiểu giới hạn. Giới hạn đó dẫn đến khái niệm *đạo hàm* trong Toán học.
2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM		
Khung kiến thức	Giới thiệu khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm: Định nghĩa và kí hiệu.	GV cần làm rõ các bước để tính đạo hàm của một hàm số tại một điểm bằng định nghĩa.
Ví dụ 1	Rèn luyện cho HS kĩ năng tính đạo hàm của một hàm số đơn giản tại một điểm, dựa vào định nghĩa.	Lưu ý HS thực hiện lần lượt các bước như đã hướng dẫn. Cũng lưu ý cho HS cách trình bày ngắn gọn trong thực hành và Chú ý sau Ví dụ 1, về một cách viết khác của định nghĩa đạo hàm. Cách viết này sẽ được sử dụng nhiều về sau.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm tại một điểm bằng định nghĩa.	HS tự làm tại lớp.
3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG		
HĐ3. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm tuỳ ý	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm tại một điểm. Ưu điểm của cách xét điểm x_0 tuỳ ý là ta chỉ cần tính đạo hàm một lần, sau đó thay các giá trị x_0 cụ thể cần tính vào kết quả là xong.	Kĩ năng tính đạo hàm không khác gì khi tính đạo hàm tại một điểm cụ thể. Điều khác biệt ở đây chỉ là kết quả sẽ phụ thuộc vào điểm x_0 và khi x_0 thay đổi ta sẽ được một hàm số, gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ đã cho.

Khung kiến thức	Giới thiệu khái niệm đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.	Lưu ý đạo hàm của một hàm số trên một khoảng (giả thiết nó tồn tại) cũng là một hàm số trên khoảng đó.
Ví dụ 2	Giúp HS biết cách tìm đạo hàm của một hàm số đơn giản cho trước (bằng định nghĩa). Một dụng ý khác của ví dụ này và HĐ3 là cung cấp công thức đạo hàm của một vài hàm số đơn giản, để lấy làm chất liệu cho ví dụ minh hoạ của bài học sau về các quy tắc tính đạo hàm.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 3	Vận dụng tổng hợp các kiến thức, kĩ năng được học để giải quyết bài toán trong tình huống mở đầu.	Cần làm rõ cho HS các bước giải: – Bước 1: Viết phương trình chuyển động (mô hình hoá bài toán). – Bước 2: Tính đạo hàm của phương trình chuyển động để có biểu thức tính vận tốc (sử dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm). – Bước 3: Vật chạm đất khi quãng đường vật đi được bằng độ cao ban đầu của vật. Từ đó tính ra thời gian và vận tốc của vật khi chạm đất.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tìm đạo hàm của hàm số đơn giản cho trước (bằng định nghĩa), tình huống tương tự Ví dụ 2.	HS tự làm tại lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
4. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM		
HĐ4. Nhận biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số	Giúp HS tìm hiểu khái niệm tiếp tuyến của một đồ thị (là "vị trí giới hạn" của cát tuyến).	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ4. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý nhấn mạnh cho HS ý nghĩa hình học của đạo hàm.
Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm.	HS tự làm tại lớp.
HĐ5. Xây dựng phương trình tiếp tuyến của đồ thị	Giới thiệu cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trong một trường hợp cụ thể.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ5. GV giúp đỡ HS khi cần. GV khái quát hoá lên thành công thức tổng quát trong Khung kiến thức.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại một điểm, qua một trường hợp cụ thể.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại một điểm, tình huống tương tự Ví dụ 5.	HS tự làm tại lớp.
Vận dụng	Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học, vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài học để giải quyết.	Đây là tình huống để thực hiện dạy học phân hoá. Tuỳ trình độ chung của lớp học, GV chọn cách dạy phù hợp (hướng dẫn để HS tự làm, hay chữa chi tiết cho HS,...). *Gợi ý.* Chọn hệ trục Oxy sao cho O là trung điểm AB, tia Ox trùng với tia OB, tia Oy hướng lên trên (như hình vẽ).

		 Khi đó $A(-200;0)$, $B(200;0)$. Gọi chiều cao giới hạn của cầu là h $(h>0)$, suy ra đỉnh cầu có toạ độ $(0;h)$. Ta tìm được phương trình parabol của cầu là $y=-\frac{h}{200^2}x^2+h.$ Theo cách làm của Ví dụ 2, ta có $y'=-\frac{2h}{200^2}x.$ Suy ra hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là $k=y'=-\frac{2h}{200^2}x, -200\le x\le 200.$ Do đó $\lvert k\rvert=\frac{2h}{200^2}\lvert x\rvert\le\frac{2h}{200^2}\cdot 200=\frac{h}{100}.$ Vì độ dốc của cầu không quá 10° nên ta có $\frac{h}{100}\le\tan 10^\circ\Leftrightarrow h\le 17{,}6.$ Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu tới mặt đường là 17,6 m.
Chữa bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Tính đạo hàm tại một điểm bằng định nghĩa: Bài tập 9.1.
- Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa: Bài tập 9.2.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị: Bài tập 9.3.

– Ứng dụng thực tế của đạo hàm: Bài tập 9.4, 9.5.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

9.1. a) Ta có $f(x) - f(-1) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

Với $x \neq -1$, $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1} = x - 2$.

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} (x-2) = -3$. Vậy $f'(-1) = -3$.

b) Ta có $f(x) - f(-1) = -x^3 - 1 = -(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$.

Với $x \neq -1$, $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{-(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)}{x+1} = -\left(x^2 - x + 1\right)$.

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} -\left(x^2 - x + 1\right) = -3$. Vậy $f'(-1) = -3$.

9.2. a) Với x_0 bất kì, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(kx^2 + c\right) - \left(kx_0^2 + c\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} k(x + x_0) = 2kx_0.$$

Vậy hàm số $y = kx^2 + c$ có đạo hàm là $y' = 2kx$.

b) Với x_0 bất kì, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^2 + xx_0 + x_0^2\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^2 + xx_0 + x_0^2\right) = 3x_0^2.$$

Vậy hàm số $y = x^3$ có đạo hàm là $y' = 3x^2$.

9.3. Với x_0 bất kì, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(-x^2 + 4x\right) - \left(-x_0^2 + 4x_0\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)(x + x_0) + 4(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(-x - x_0 + 4\right) = -2x_0 + 4.$$

Vậy hàm số $y = -x^2 + 4x$ có đạo hàm là $y' = -2x + 4$.

a) Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(1) = 2$. Ngoài ra, ta có $f(1) = 3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 3 = 2(x - 1)$ hay $y = 2x + 1$.

b) Do $y_0 = 0$ nên $-x_0^2 + 4x_0 = 0$. Suy ra $x_0 = 0; x_0 = 4$.

Với $x_0 = 0$, ta có hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(0) = 0$, nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 0 = 0(x - 0)$ hay $y = 0$.

Với $x_0 = 4$, ta có hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(4) = -4$, nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 0 = -4(x - 4)$ hay $y = -4x + 16$.

9.4. Khi vật chạm đất thì $h = 0$, tức là $19{,}6t - 4{,}9t^2 = 0 \Rightarrow t = 0; t = 4$.

Ta có $h' = 19{,}6 - 9{,}8t$.

Vận tốc của vật khi nó chạm đất là $v(4) = h'(4) = -19{,}6$ (m/s).

9.5. Ta tính được $y' = 2ax + b$.

a) Ta có $c = y(0) = 0$.

b) Ta có $y'(0)$ là hệ số góc của đồ thị tại điểm P, tức là $y'(0) = 0{,}5$.

Như vậy $y'(0) = b = 0{,}5$.

c) Do khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m nên hoành độ tại điểm Q là 40. Ta có $y'(40)$ là hệ số góc của đồ thị tại điểm Q, tức là $y'(40) = 80a + b = -0{,}75$.

Do $b = 0{,}5$ nên $a = -\frac{1}{64}$. Vậy phương trình parabol là $y = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{2}x$.

d) Chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển P và Q là $|y(0) - y(40)| = 5$ (m).

Bài 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Tính được đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản: hàm luỹ thừa với số mũ nguyên dương, hàm căn thức bậc hai, hàm lượng giác, hàm số mũ, hàm số lôgarit.
- Tính được đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số và đạo hàm của hàm số hợp.
- Vận dụng được quy tắc tính đạo hàm vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua những bài toán thực tiễn liên quan đến đạo hàm.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Bài học này cung cấp các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số, đạo hàm của hàm số hợp và công thức đạo hàm của những hàm số sơ cấp cơ bản. Sau bài học này, về nguyên tắc HS có thể tính được đạo hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp. Một điểm khác biệt so với SGK Toán lớp 11 trước đây là ở đây trình bày cả các công thức tính đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit, vì trong Chương trình mới hai loại hàm số này đã được giới thiệu ở lớp 11.
- Một trong những kĩ năng quan trọng nhất của bài này là cách tính đạo hàm của hàm số hợp. Đây là kĩ năng cực kì thiết yếu mà HS cần nắm vững.
- Do tinh thần giảm tính hàn lâm của Chương trình mới, nên SGK Toán 11 không trình bày khái niệm hàm số luỹ thừa với số mũ thực tổng quát và công thức tính đạo hàm của nó như ở SGK Toán THPT trước đây, mà chỉ trình bày công thức tính đạo hàm của hàm số $y = x^n$ với số mũ n nguyên dương và công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$.

  GV cần lưu ý điều này khi giảng dạy và giao bài tập cho HS để không vượt quá YCCĐ của Chương trình.
- Chuẩn bị:
  - GV: Tìm hiểu một số ứng dụng của đạo hàm trong thực tiễn và trong các môn học khác.
  - HS: Ôn lại cách tính đạo hàm bằng định nghĩa, cách tính giới hạn hàm số, các công thức lượng giác và các công thức liên quan đến mũ, lôgarit.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 3 tiết.

+ Tiết 1: Mục 1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Mục 2. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

+ Tiết 2: Mục 3. Đạo hàm của hàm số hợp

Mục 4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

+ Tiết 3: Mục 5. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Gợi ý chữa một số bài tập cuối bài học

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP		
HĐ1. Nhận biết đạo hàm của hàm số $y = x^n$	HS tính đạo hàm của hàm số $y = x^n$ trong trường hợp riêng $n = 3$. Từ đó và các kết quả đã biết ở Bài 31 với $n = 1$, $n = 2$, khái quát hoá thành công thức tính đạo hàm của hàm số $y = x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1.
HĐ2. Nhận biết đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$	HS tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ bằng định nghĩa.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2.
Ví dụ 1	Rèn luyện cho HS kĩ năng tính đạo hàm của hàm số tại một điểm cụ thể, khi đã biết công thức tính đạo hàm của hàm số đó.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Lưu ý cho HS là chỉ cần thay giá trị cụ thể của x tại điểm cần tính đạo hàm vào công thức đạo hàm.
2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG		
HĐ3. Nhận biết quy tắc đạo hàm của tổng	Giúp HS khám phá quy tắc tính đạo hàm của tổng trong một trường hợp cụ thể.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3.

Khung kiến thức	Giới thiệu quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương hai hàm số.	GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý cho HS cách ghi nhớ các công thức quan trọng này.
Ví dụ 2	Giúp HS biết cách vận dụng các quy tắc tính đạo hàm vừa học, để tính đạo hàm của đa thức và phân thức đại số.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Ví dụ 3	Vận dụng tổng hợp các kiến thức, kĩ năng được học để giải quyết bài toán trong tình huống mở đầu.	Cần làm rõ cho HS các bước giải. Giải thích rõ ý nghĩa của dấu âm trong kết quả vận tốc nhận được.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tìm đạo hàm của hàm số đơn giản bằng cách sử dụng các quy tắc tính đạo hàm.	HS tự làm tại lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP		
Khái niệm hàm số hợp	Giúp HS tìm hiểu khái niệm hàm số hợp.	GV giảng giải và minh hoạ cho HS. Đây là khái niệm khó khi HS mới tiếp cận. Kĩ năng quan trọng cần lưu ý cho HS là cách nhận biết hàm số trung gian *u*.
Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng biểu diễn hàm số đã cho dưới dạng một hàm số hợp (trong những tình huống đơn giản).	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Đây là kĩ năng rất quan trọng cần dùng nhiều khi tính đạo hàm của các hàm số sau này, HS cần nắm vững.

HĐ4. Nhận biết quy tắc đạo hàm của hàm số hợp	Giúp HS nhận biết công thức đạo hàm của hàm số hợp trong một trường hợp riêng đơn giản.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ4. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. Lưu ý cho HS cách ghi nhớ công thức quan trọng này.
Ví dụ 5	Rèn luyện kĩ năng tính đạo hàm của hàm số hợp.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. Lưu ý cho HS mấu chốt ở đây là nhận biết được hàm số đã cho dưới dạng hàm số hợp và sử dụng các quy tắc tính đạo hàm đã được học.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm của hàm số hợp.	HS tự làm tại lớp.
4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC		
HĐ5. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$		HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ5.
Ví dụ 6	Rèn luyện kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lượng giác.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lượng giác.	HS tự làm tại lớp.
HĐ6. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$		HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ6.
Ví dụ 7	Rèn luyện kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lượng giác.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lượng giác.	HS tự làm tại lớp.

HĐ7. Xây dựng công thức tính đạo hàm của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$		HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ7. Sử dụng công thức đạo hàm của thương để tìm công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$.
Ví dụ 8	Rèn luyện kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lượng giác.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 5	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lượng giác.	HS tự làm tại lớp.
Vận dụng 1	Vận dụng các kiến thức, kĩ năng được học để giải quyết một bài toán thực tế.	*Gợi ý.* Vận tốc của vật là $v(t) = s'(t) = -4\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)' \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$ $= -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$. Vận tốc của vật khi $t = 5$ giây là $v(5) = -8\pi \sin\frac{79\pi}{8} \approx 9{,}6$ (m/giây).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT		
HĐ8. Giới hạn cơ bản của hàm số mũ và hàm số lôgarit	Giới thiệu các giới hạn cơ bản liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ8. GV giúp đỡ HS khi cần. GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.

HĐ9. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số mũ		HS thực hiện yêu cầu của HĐ9. GV khái quát hoá lên thành công thức đạo hàm của hàm số hợp $y = e^u$.
Ví dụ 9	Rèn luyện kĩ năng tính đạo hàm của hàm số mũ.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 6	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm của hàm số mũ.	HS tự làm tại lớp.
HĐ10. Xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số lôgarit		HS thực hiện yêu cầu của HĐ10. GV khái quát hoá lên thành công thức đạo hàm của hàm số hợp $y = \ln u$ và $y = \log_a u$.
Ví dụ 10	Rèn luyện kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lôgarit.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 7	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm của hàm số lôgarit.	HS tự làm tại lớp.
Vận dụng 2	Vận dụng ý nghĩa và công thức tính đạo hàm trong một vấn đề thực tế.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý.* Tốc độ thay đổi của pH với nồng độ $[H^+]$ là đạo hàm của pH, tức là $\left(-\log[H^+]\right)' = -\frac{\left([H^+]\right)'}{[H^+]\cdot\ln 10} = -\frac{1}{[H^+]\cdot\ln 10}$.
Gợi ý chữa bài tập cuối bài	GV lưu ý/gợi ý cho HS một số bài tập cuối bài trong SGK.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Tính đạo hàm của hàm số bằng cách sử dụng quy tắc tính đạo hàm: Bài tập 9.6, 9.7, 9.8, 9.9.
- Tính và ước lượng đạo hàm: Bài tập 9.10.

– Ứng dụng thực tế của đạo hàm: Bài tập 9.11, 9.12.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI

9.6. a) Ta có $y' = \left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' + 2(x)' + 1' = 3x^2 - 6x + 2.$

b) Ta có $y' = \left(x^2\right)' - 4\left(\sqrt{x}\right)' + 3' = 2x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

9.7. a) Ta có $y' = \dfrac{(2x-1)' \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}.$

b) Ta có $y' = \dfrac{(2x)' \cdot \left(x^2+1\right) - (2x) \cdot \left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2\left(x^2+1\right) - 4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$

9.8. a) Ta có $y' = x' \cdot \sin^2 x + x \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' = \sin^2 x + x \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + x \cdot \sin 2x.$

b) Ta có $y' = 2\cos x \cdot (\cos x)' + (2x)' \cos 2x = -2\cos x \cdot \sin x + 2\cos 2x = -\sin 2x + 2\cos 2x.$

c) Ta có $y' = (3x)' \cos 3x - 3\cos x = 3\cos 3x - 3\cos x.$

d) Với $x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$ ta có $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}.$

9.9. a) Ta có $y' = \left(3x - x^2\right)' \cdot 2^{3x-x^2} \cdot \ln 2 = (3-2x) \cdot 2^{3x-x^2} \cdot \ln 2.$

b) Ta có $y' = \dfrac{(4x+1)'}{(4x+1) \cdot \ln 3} = \dfrac{4}{(4x+1) \cdot \ln 3}.$

9.10. Ta có

$$y' = 2 \cdot 2 \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 4\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)' \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 12\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 6\sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Khi đó $\left|f'(x)\right| = 6\left|\sin\left(6x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leq 6.$

9.11. a) Vận tốc của vật rơi tự do là $v(t) = h'(t) = -9{,}8t$ (m/s).

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là $v(3) = -9{,}8 \cdot 3 = -29{,}4$ (m/s).

b) Khi vật chạm đất thì $h(t) = 0$ tức là $100 - 4{,}9t^2 = 0 \Rightarrow t \approx 4{,}52$.

Vận tốc khi vật chạm đất là $v(4{,}52) \approx -44{,}3$ (m/s).

Ở đây, dấu âm trong các kết quả tính vận tốc thể hiện vật chuyển động thẳng đứng xuống dưới (ngược với chiều dương).

9.12. Vận tốc của hạt sau t giây là $v(t) = s'(t) = 0{,}5 \cdot (4\pi t)' \cos(4\pi t) = 2\pi\cos(4\pi t)$ (cm/s).

Ta có $2\pi\cos(4\pi t) \le 2\pi \cdot 1$ nên vận tốc cực đại của hạt là 2π (cm/s).

Bài 33. ĐẠO HÀM CẤP HAI (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được đạo hàm cấp hai của một hàm số.
- Tính được đạo hàm cấp hai của một số hàm số đơn giản.
- Vận dụng được ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai để giải quyết một số bài toán thực tiễn liên quan.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua những bài toán thực tiễn liên quan đến đạo hàm cấp hai.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Khái niệm đạo hàm cấp hai ở đây được trình bày nhằm hai mục đích:
  - + Một là để giới thiệu ý nghĩa cơ học của nó, là kiến thức cần dùng trong Vật lí.
  - + Hai là để trình bày quy tắc tìm cực trị của hàm số bằng cách dùng đạo hàm cấp hai sẽ được học ở lớp 12. Do đó, ở đây SGK chỉ trình bày khái niệm (hàm số) đạo hàm cấp hai của một hàm số (nhận được bằng cách tính đạo hàm hai lần liên tiếp hàm số

đã cho nhờ sử dụng các quy tắc tính đạo hàm), chứ không trình bày khái niệm đạo hàm cấp hai của một hàm số tại một điểm. Ngoài ra, theo tinh thần của Chương trình mới, chúng tôi cũng giảm nhẹ mức độ của các ví dụ, bài tập thuần tuý toán liên quan đến đạo hàm cấp hai.

- Chuẩn bị:
  + GV: Chuẩn bị thông tin về một số ứng dụng trong thực tế của đạo hàm cấp hai.
  + HS: Ôn lại các quy tắc tính đạo hàm. Xem lại các khái niệm vận tốc, gia tốc và mối quan hệ giữa các khái niệm này của một vật chuyển động thẳng đã được học trong Vật lí.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 1 tiết.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Sau khi HS học xong ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM CẤP HAI		
HĐ1. Nhận biết đạo hàm cấp hai của một hàm số	Giới thiệu cho HS cách tìm đạo hàm của đạo hàm (cấp một) của một hàm số.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1.
Khung kiến thức	Giới thiệu khái niệm đạo hàm cấp hai của một hàm số: Định nghĩa và kí hiệu.	GV cần lưu ý cho HS là đạo hàm cấp hai của một hàm số chính là đạo hàm của đạo hàm (cấp một) của hàm số đó. Do đó, để tính đạo hàm cấp hai, xuất phát từ hàm số đã cho ta thực hiện tính đạo hàm liên tiếp hai lần.

Ví dụ 1	Rèn luyện cho HS kĩ năng tính đạo hàm cấp hai của một hàm số trong tình huống đơn giản.	Lưu ý cho HS thực hiện lần lượt các bước: Đầu tiên, tính đạo hàm cấp một $f'(x)$. Sau đó tính tiếp đạo hàm của hàm số $f'(x)$, ta được đạo hàm cấp hai $f''(x)$.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng tính đạo hàm cấp hai của hàm số đơn giản, tình huống tương tự Ví dụ 1.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*. a) Ta có $y' = x'e^{2x} + x\left(e^{2x}\right)' = e^{2x} + 2xe^{2x}$ và $y'' = (2x)' \cdot e^{2x} + (2x)' \cdot e^{2x} + 2x \cdot (2x)' \cdot e^{2x}$ $= (4+4x)e^{2x}$. b) Ta có $y' = \dfrac{(2x+3)'}{2x+3} = \dfrac{2}{2x+3}$ và $y'' = -2 \cdot \dfrac{(2x+3)'}{(2x+3)^2} = -\dfrac{4}{(2x+3)^2}$.
2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI		
HĐ2. Nhận biết ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai	Giúp HS biết được gia tốc tức thời chính là đạo hàm của vận tốc.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1.
Khung kiến thức	Giới thiệu ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.	GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. GV có thể giải thích cho HS là đạo hàm của quãng đường là vận tốc, đạo hàm của vận tốc là gia tốc. Do đó đạo hàm cấp hai của quãng đường là gia tốc.
Ví dụ 2	Vận dụng kiến thức đã học trong bài vào giải quyết bài toán trong tình huống mở đầu.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Vận dụng	Vận dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai vào một bài toán thực tiễn liên quan.	HS tự làm tại lớp. *Gợi ý*. Ta có $s' = 4t + 2t^3$. Gia tốc của vật là $a = s'' = 4 + 6t^2$. Vậy gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $a(4) = 4 + 6 \cdot 4^2 = 100$ (m/s^2).

Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Phân loại bài tập

- Tính đạo hàm cấp hai: Bài tập 9.13, 9.14.
- Ước lượng, xác định đạo hàm cấp hai: Bài tập 9.15, 9.16.
- Ứng dụng thực tế của đạo hàm cấp hai: Bài tập 9.17.

Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong SBT và các tài liệu tham khảo khác.

IV. ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI

9.13. Ta có $f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2e^x$ và

$$f''(x) = (2x)' \cdot e^x + 2x(e^x)' + (x^2)' e^x + x^2 (e^x)'$$

$$= 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = (2 + 4x + x^2)e^x.$$

Vậy $f''(0) = 2$.

9.14. a) Ta có $y' = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1}$ và $y'' = -\frac{(1+x)'}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$.

b) Ta có $y' = \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}$ và

$$y'' = -\frac{2 \cdot (\cos^2 2x)'}{\cos^4 2x} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot \cos 2x \cdot (\cos 2x)'}{\cos^4 2x} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cos 2x \cdot (2x)' \sin 2x}{\cos^4 2x} = \frac{8 \sin 2x}{\cos^3 2x}.$$

9.15. Ta có $P'(x) = 2ax + b$ và $P''(x) = 2a$. Do $P'(1) = 0$ và $P''(1) = -2$ ta thu được các phương trình $2a + b = 0$ và $2a = -2$.

Từ đây ta tìm được $a = -1, b = 2$.

9.16. Ta có

$$f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 4 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Khi đó $f''(x) = 2 \cdot \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)' \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy $\left|f''(x)\right| = 4\left|\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \le 4$ với mọi x.

9.17. Ta có $s'(t) = 0{,}5 \cdot \left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)' \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = \pi\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$.

Gia tốc của hạt được cho bởi phương trình $a(t) = s''(t) = -2\pi^2 \cdot \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$.

Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây là $a(5) = -2\pi^2 \cdot \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{5}\right) \approx -11{,}6$ (m/s^2).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX (1 tiết)

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống kiến thức lí thuyết của cả chương (có thể chuẩn bị slides dạng sơ đồ hoá).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản của toàn bộ chương và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở cuối chương theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

9.18. B **9.19.** A **9.20.** B **9.21.** C **9.22.** A **9.23.** C **9.24.** A

9.25. a) Với $x \ne -2$, ta có $y' = 5\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^4\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^4 \frac{25}{(x+2)^2}$.

b) Ta có $y' = \frac{(2x)'(x^2+1) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

c) Ta có

$$y' = (e^x)'\sin^2 x + e^x(\sin^2 x)' = e^x \cdot \sin^2 x + e^x \cdot 2\sin x \cdot \cos x = (\sin^2 x + \sin 2x)e^x.$$

d) Với $x > 0$, ta có $y' = \frac{(x+\sqrt{x})'}{(x+\sqrt{x})\ln 10} = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})\ln 10}$.

9.26. a) Tập xác định của hàm số $D=(0;+\infty)$.

b) $y'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=(\alpha\ln x)'\cdot e^{\alpha\ln x}=\alpha\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{\alpha}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

9.27. Với $x>-\frac{1}{3}$, ta có $f'(x)=\frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$. Như vậy $f(1)=2,\ f'(1)=\frac{3}{4}$.

Vậy $g(x)=2+\left(x^2-1\right)\cdot 3=3x^2-1\Rightarrow g(2)=11$.

9.28. Với $x\neq 1$, ta có $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$, $f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$. Vậy $f''(0)=-4$.

9.29. Ta có $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(x^2f(x)\right)'=2x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)$.

Mặt khác, từ $f'(x)=x^2f(x)$ suy ra $f'(1)=1\cdot f(1)=2$.

Do đó $f''(1)=2f(1)+f'(1)=6$.

9.30. Ta có $y'=3x^2+6x$.

Do hệ số góc của tiếp tuyến là $k=f'(1)=9$. Ngoài ra, ta có $f(1)=3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y-3=9(x-1)$ hay $y=9x-6$.

9.31. Ta có $y'=-\frac{a}{x^2}$. Gọi $M\left(m;\frac{a}{m}\right), m\neq 0$ là một điểm bất kì trên hypebol. Phương trình tiếp tuyến của hypebol tại điểm M là $y=-\frac{a}{m^2}(x-m)+\frac{a}{m}$ hay là $y=-\frac{a}{m^2}x+\frac{2a}{m}\ (d)$.

Gọi A là giao điểm của (d) với trục hoành, khi đó $A(2m;0)\Rightarrow OA=|2m|$.

Gọi B là giao điểm của (d) với trục tung, khi đó $B\left(0;\frac{2a}{m}\right)\Rightarrow OB=\left|\frac{2a}{m}\right|$.

Như vậy diện tích tam giác OAB là $S=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot|2m|\cdot\left|\frac{2a}{m}\right|=2a$ không đổi.

9.32. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta biết rằng đạo hàm của hàm vị trí là hàm vận tốc, đạo hàm của hàm vận tốc là hàm gia tốc, và một hàm số đồng biến (tương ứng nghịch biến) trên một khoảng nào đó nếu đạo hàm của nó dương (tương ứng âm) trên khoảng đó.

Trên hình vẽ ta thấy: Hàm số c luôn đồng biến, tức là đạo hàm của nó phải luôn không âm, do đó hàm số b là đạo hàm của hàm số c; hàm số b đồng biến trên khoảng mà hàm số a dương và nghịch biến trên khoảng mà hàm số a âm, do đó hàm số a là đạo hàm của hàm số b.

Vậy hàm số a là hàm gia tốc, hàm số b là hàm vận tốc và hàm số c là hàm vị trí của ô tô.

9.33. Ta có $v(t) = s' = 3t^2 - 12t + 9$ và $a(t) = s'' = 6t - 12$.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây là $v(2) = -3$ m/s.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $v(4) = 9$ m/s.

b) Vật đứng yên khi vận tốc triệt tiêu, tức là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 3$.

Vậy tại thời điểm 1 giây hoặc 3 giây thì vật đứng yên.

c) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $a(4) = 12$ (m/s^2).

d) Ta có: $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$.

Do đó ta cần tính riêng rẽ quãng đường vật đi được trong từng khoảng thời gian [0; 1], [1; 3], [3; 5].

Từ thời điểm $t = 0$ giây đến thời điểm $t = 1$ giây, vật đi được quãng đường là:

$$\left|f(1) - f(0)\right| = \left|4 - 0\right| = 4 \text{ m}.$$

Từ thời điểm $t = 1$ giây đến thời điểm $t = 3$ giây, vật đi được quãng đường là:

$$\left|f(3) - f(1)\right| = \left|0 - 4\right| = 4 \text{ m}.$$

Từ thời điểm $t = 3$ giây đến thời điểm $t = 5$ giây, vật đi được quãng đường là:

$$\left|f(5) - f(3)\right| = \left|20 - 0\right| = 20 \text{ m}.$$

Vậy tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là: 4 + 4 + 20 = 28 m.

e) Xét $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Với $t \in [0;2)$ thì gia tốc âm, tức là vật giảm tốc.

Với $t \in (2;5]$ thì gia tốc dương, tức là vật tăng tốc.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

MỘT VÀI ÁP DỤNG CỦA TOÁN HỌC TRONG TÀI CHÍNH (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

HS biết vận dụng kiến thức toán học, cụ thể là công thức lãi kép và công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân, để giải quyết một số vấn đề tài chính thường gặp trong cuộc sống như bài toán gửi tiết kiệm tích luỹ, bài toán vay trả góp.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Chuẩn bị trước khi lên lớp

- Đối với GV: Tìm hiểu bảng lãi suất gửi tiết kiệm tích luỹ, bảng lãi suất vay trả góp (khi mua nhà, mua ô tô, ...) của một số ngân hàng tại thời điểm thực hiện bài dạy.
- Đối với HS: Chuẩn bị máy tính cầm tay.

2. Những điểm cần lưu ý

- GV cần giải thích kĩ cho HS thế nào là niên kim.
- Cơ sở toán học cho các công thức xây dựng trong bài là công thức lãi kép quen thuộc và công thức tính tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân được học ở Chương II.
- Ngân hàng thường công bố lãi suất năm dưới dạng phần trăm. Cần lưu ý cho HS là từ lãi suất năm đã cho, cần tính lãi suất i theo kì hạn gửi và đổi i sang số thập phân trước khi thay vào các công thức trong bài.
- Tuỳ trình độ chung của lớp học mà GV có thể thiết kế các nhiệm vụ thực tế phù hợp, tương tự (nhưng có thể phức tạp hơn) các yêu cầu nêu ra trong Vận dụng 1, Vận dụng 2, Vận dụng 3 để giao cho các nhóm HS.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Phân bổ thời gian: 2 tiết.

Thực hiện: Chia lớp thành bốn nhóm và tiến hành như sau:

Bước 1. Các nhóm thảo luận cùng thực hiện HĐ1, HĐ2, HĐ3 trong bài học, dưới sự hướng dẫn của GV, để tìm hiểu các khái niệm và công thức cần thiết.

Bước 2. Dựa vào dữ liệu đã chuẩn bị và gợi ý trong các Vận dụng trong bài học, GV đặt nhiệm vụ thực tế cụ thể cho từng nhóm. Mỗi nhóm sẽ thực hiện một nhiệm vụ riêng. Các nhóm hoàn thành nhiệm vụ được giao, sau đó trình bày kết quả trước lớp.

CẤU PHẦN	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
HĐ1. Số tiền của một niên kim	Giúp HS làm quen với cách xây dựng công thức tính số tiền của một niên kim, qua một trường hợp cụ thể.	GV nêu tình huống, yêu cầu HS thực hiện lần lượt các yêu cầu a), b), c). GV cần giải thích rõ cho HS thế nào là niên kim. Sau đó gợi ý cho HS quan sát các công thức nhận được trong các phần a), b), c) và khái quát hoá để được công thức tính số tiền của một niên kim tổng quát trong Khung kiến thức 1. Cần lưu ý cho HS là thực tế ngân hàng thường cho lãi suất năm và ta phải xác định số kì n tính lãi trong năm và lãi suất i của mỗi kì.
HĐ2. Nhận biết giá trị hiện tại của một niên kim	Giúp HS làm quen với cách xây dựng công thức tính số tiền hiện tại của một niên kim, qua một trường hợp cụ thể.	GV nêu tình huống, yêu cầu HS thực hiện lần lượt các yêu cầu a), b). Sau đó gợi ý cho HS quan sát các công thức nhận được trong các phần a), b) và khái quát hoá để được công thức tính giá trị hiện tại của một niên kim trong Khung kiến thức 2.
HĐ3. Nhận biết công thức liên quan đến vay trả góp	Giúp HS làm quen với cách tính giá trị hiện tại của một khoản vay trả góp, qua một trường hợp cụ thể.	GV nêu tình huống, yêu cầu HS thực hiện lần lượt yêu cầu trong HĐ3. GV cần giải thích rõ cho HS thế nào là vay trả góp. Sau đó gợi ý cho HS khái quát hoá để được công thức tính số tiền của mỗi khoản thanh toán của một khoản vay trả góp trong Khung kiến thức 3.

Thực hiện các nhiệm vụ nhóm	Giúp HS biết vận dụng kiến thức trong bài vào các tình huống thực tế liên quan, thông qua việc thực hiện nhiệm vụ nhóm.	– GV giao nhiệm vụ cụ thể cho từng nhóm. – Các nhóm HS sử dụng các công thức đã học trong bài, thảo luận nhóm để thực hiện nhiệm vụ được giao. Sau đó các nhóm cử đại diện trình bày kết quả trước lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV có thể đưa ra một số lưu ý cần thiết khi gửi tiết kiệm tích luỹ và vay trả góp cho HS (lựa chọn ngân hàng, lựa chọn kì hạn,...).

LỰC CĂNG MẶT NGOÀI CỦA NƯỚC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Thực hiện được hoạt động thu thập số liệu ghép nhóm khi việc thu thập được chính xác số liệu có thể khó khăn.
- So sánh số trung bình của hai mẫu số liệu ghép nhóm như là đại diện của hai mẫu số liệu để rút ra một số kết luận.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực sử dụng công cụ thống kê để giải quyết bài toán thực tiễn.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Bài trải nghiệm này nhằm mục đích cho HS thực hành việc thu thập dữ liệu ghép nhóm khi mà thu thập dữ liệu như vậy sẽ nhanh chóng tiện lợi hơn, hoặc có thể có khó khăn để thu được số liệu chính xác (chẳng hạn số liệu về thu nhập/ tháng của người lao động, thời gian tự học/ ngày của HS, ...). GV có thể nêu vấn đề khác để HS thực hiện tại lớp ví dụ:

  + So sánh độ dài gang tay/ sải bước chân của học sinh nam, nữ;

  + So sánh thời gian tự học/ ngày của hai nhóm HS.

Có thể thay vì dùng giấy bóng kính, HS có thể dùng tấm nhựa trong suốt, hay những vật dụng khác thích hợp.

- Tờ giấy có dòng kẻ chia centimét và đánh số giúp việc xác định đường kính bóng nhanh chóng hơn. Tuy nhiên, GV có thể dùng cách khác thay thế miễn sao xác định đường kính bong bóng một cách tương đối để đưa vào các nhóm số liệu.
- Để tránh việc đường kính bong bóng quá to hay quá nhỏ do nhiệt độ dung dịch và lượng xà phòng pha vào nước khác nhau, GV cần thí nghiệm trước để lựa chọn lượng xà phòng, và nhiệt độ dung dịch thích hợp để hướng dẫn HS thực hiện.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1. Thời lượng

Bài thực hành trải nghiệm này thực hiện trong 2 tiết.

Tiết 1: Thực hiện HĐ1.

Tiết 2: Thực hiện HĐ2, HĐ3, HĐ4.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Nêu vấn đề	Đặt bài toán thực tế cho HS.	– Nêu một số ví dụ về lực căng mặt ngoài của chất lỏng. – Nêu vấn đề so sánh lực ngoài của nước xà phòng ở nhiệt độ khác nhau. – Dẫn dắt đến việc thu thập dữ liệu trên hai dung dịch nước xà phòng ở nhiệt độ khác nhau để so sánh đường kính bong bóng.
HĐ1. Thu thập dữ liệu	Thu thập dữ liệu đường kính bong bóng ứng với hai dung dịch xà phòng ở nhiệt độ khác nhau.	– GV chia lớp thành hai nhóm HS: một nhóm thí nghiệm với nước pha xà phòng ở nhiệt độ phòng, nhóm kia với nước nóng. – Hướng dẫn HS chuẩn bị dụng cụ thí nghiệm. – GV yêu cầu HS mỗi nhóm thực hiện thí nghiệm, ghi lại kết quả vào bảng theo mẫu.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
HĐ2	Tóm tắt dữ liệu bằng bảng thống kê.	GV yêu cầu HS xác định tần số của mỗi nhóm dựa trên dữ liệu đã ghi chép trong bảng trên và lập bảng thống kê theo mẫu.
HĐ3, HĐ4	Tính số trung bình.	– GV yêu cầu HS mỗi nhóm tính số trung bình đường kính bong bóng dựa vào bảng thống kê ở HĐ2 hoặc dựa vào kết quả thí nghiệm cho sẵn trong HĐ4. – GV cho học HS so sánh số trung bình của hai mẫu số liệu và nêu nhận xét.

3. Gợi ý khác

GV có thể giới thiệu với HS một số hiện tượng cho thấy sức căng bề mặt của chất lỏng trong tự nhiên, đời sống và một số ứng dụng của nó.

MỘT VÀI MÔ HÌNH TOÁN HỌC SỬ DỤNG HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

HS vận dụng được kiến thức về hàm số mũ và hàm số lôgarit trong một số áp dụng thực tiễn như mô hình tăng trưởng hoặc suy thoái cấp mũ, một số công thức trong Vật lí và Hoá học sử dụng thang đo lôgarit.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Chuẩn bị trước khi lên lớp

– Đối với GV: Dựa vào các thông tin trong SGK và các tài liệu liên quan, tìm hiểu về một số ứng dụng của hàm số mũ và hàm số lôgarit trong những vấn đề thực tế và khoa học kĩ thuật. Sưu tầm những số liệu thực tế liên quan. Từ đó thiết kế các nhiệm vụ thực tế phù hợp để giao cho từng nhóm HS.

– Đối với HS: Ôn tập lại các kiến thức về hàm số mũ và hàm số lôgarit. Chuẩn bị máy tính cầm tay.

2. Những điểm cần lưu ý

- Mô hình tăng trưởng (hoặc suy thoái cấp mũ) diễn tả những hiện tượng tăng trưởng (hoặc suy thoái) tự do, không bị giới hạn.
- Thang đo lôgarit thường được sử dụng để đo những đại lượng vật lí hoặc hoá học mà giá trị của nó thay đổi trong một phạm vi rất lớn. Khi đó người ta lấy lôgarit giá trị của đại lượng đó để được một bộ số dễ quản lí hơn.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

Thời lượng: 1 tiết.

Thực hiện: Chia lớp thành bốn nhóm và có thể tiến hành như sau:

Bước 1. Phân công nhiệm vụ cụ thể cho từng nhóm:

+ Nhóm 1 tìm hiểu về mô hình tăng trưởng hoặc suy thoái cấp mũ.
+ Nhóm 2 tìm hiểu về thang đo pH.
+ Nhóm 3 tìm hiểu về thang độ Richter.
+ Nhóm 4 tìm hiểu về thang đo decibel.

Các nhóm tự thảo luận nội dung tương ứng trong SGK, dưới sự hướng dẫn của GV, để tìm hiểu các khái niệm và công thức cần thiết.

Bước 2. Dựa vào dữ liệu đã chuẩn bị và gợi ý trong các Vận dụng trong bài học, GV đặt nhiệm vụ thực tế cụ thể cho từng nhóm. Mỗi nhóm sẽ thực hiện một nhiệm vụ riêng. Các nhóm hoàn thành nhiệm vụ được giao, sau đó trình bày kết quả trước lớp.

Để hiệu quả, GV có thể giao nội dung và nhiệm vụ cần thực hiện cho các nhóm trước để HS có thời gian tìm hiểu và tra cứu các thông tin cần thiết. Đến giờ thực hành trải nghiệm thì các em sẽ trao đổi, thảo luận nhóm để chuẩn bị bản báo cáo thực hiện nhiệm vụ và thuyết trình trước lớp.

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG HOẶC SUY THOÁI CẤP MŨ		
Nhóm 1	Giúp HS làm quen với ứng dụng của hàm số mũ trong một vài mô hình tăng trưởng hoặc suy thoái đơn giản, như tăng trưởng dân số, sự thay đổi khối lượng của chất phóng xạ.	– HS thảo luận nhóm nội dung tương ứng trong SGK. GV giải thích thêm cho các em cơ sở khoa học của phương pháp dùng carbon-14 để xác định tuổi của cổ vật. – Nhóm thực hiện nhiệm vụ thực tế GV giao và trình bày kết quả trước lớp.
2. THANG ĐO LÔGARIT		
Nhóm 2	Giúp HS làm quen với thang đo pH để đo độ acid của dung dịch.	– HS thảo luận nhóm nội dung tương ứng trong SGK. – Nhóm thực hiện nhiệm vụ thực tế GV giao và trình bày kết quả trước lớp. – Có thể yêu cầu HS yêu cầu tìm hiểu thêm về ý nghĩa của độ pH trong thực tế.
Nhóm 3	Giúp HS làm quen với thang độ Richter để đo cường độ của các trận động đất	– HS thảo luận nhóm nội dung tương ứng trong SGK. – Nhóm thực hiện nhiệm vụ thực tế GV giao và trình bày kết quả trước lớp. – Có thể yêu cầu HS tìm hiểu thêm về mức độ thiệt hại do các trận động đất gây ra, tuỳ theo cường độ của nó.
Nhóm 4	Giúp HS làm quen với thang đo decibel để đo mức cường độ âm.	– HS thảo luận nhóm nội dung tương ứng trong SGK. – Nhóm thực hiện nhiệm vụ thực tế GV giao và trình bày kết quả trước lớp.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM HÌNH HỌC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

HS vận dụng được các kiến thức hình học tương ứng trong việc tạo lập hình không gian, đo đạc và vẽ hình bằng phần mềm.

2. Về năng lực, phẩm chất

Bài học góp phần phát triển các phẩm chất, năng lực sau cho HS:

- Năng lực tư duy và lập luận toán học (xuyên suốt bài học);
- Năng lực giao tiếp toán học (xuyên suốt bài học);
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (máy tính cầm tay, thước kẻ, ê ke, hoặc phần mềm vẽ hình);
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học (xuyên suốt bài học);
- Năng lực mô hình hoá toán học (xuyên suốt bài học);
- Các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực (xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập).

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

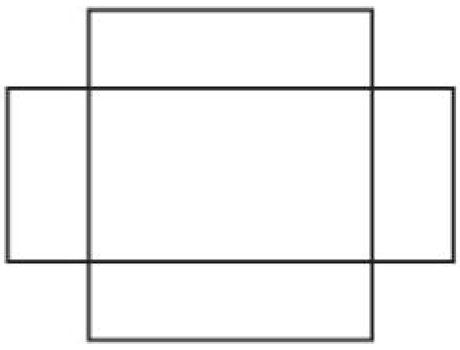
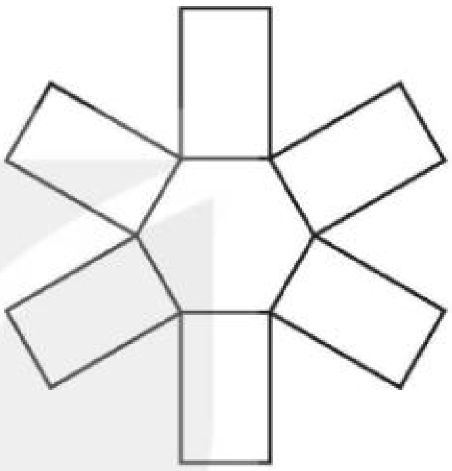
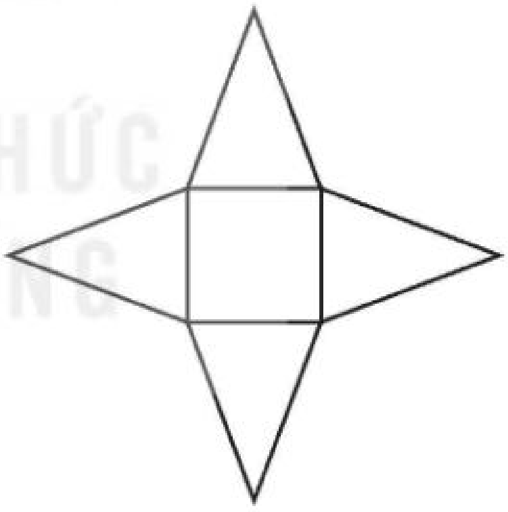
- Tuỳ điều kiện và hoàn cảnh cụ thể, GV lựa chọn một số hoạt động phù hợp, hoặc thay thế bằng các hoạt động tương tự.
- Có thể cho HS thực hiện theo các nhóm.
- Chuẩn bị các dụng cụ theo gợi ý được nêu trong SGK.

III. GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng: 2 tiết

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. Gấp giấy, tạo dựng hình không gian	Tạo dựng các hình không gian đã học.	GV có thể gợi ý HS vẽ hình trải của các hình tương ứng trên bìa giấy trước khi cắt.

		Chẳng hạn, sau đây là hình trải của một số hình:  (Hình trải của thùng hình hộp chữ nhật không có nắp)  (Hình trải của thùng hình lăng trụ lục giác đều không có nắp)  (Hình trải của hình chóp tứ giác đều)
2. Đo đạc và tính toán	Vận dụng kiến thức, kĩ năng đã học để thực hành đo đạc.	GV hướng dẫn HS thực hiện theo các bước đã được nêu trong SGK.
3. Vẽ hình với phần mềm GeoGebra	Thực hành vẽ hình bằng phần mềm.	GV hướng dẫn HS thực hiện theo các bước đã được nêu trong SGK.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

I. GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống hoá kiến thức lí thuyết (nếu có điều kiện, nên chuẩn bị bài trình chiếu ở dạng sơ đồ hoá để HS dễ tiếp thu).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập cuối năm tuỳ theo dụng ý sư phạm của mình.

II. ĐÁP SỐ/ HƯỚNG DẪN/ LỜI GIẢI

A – Trắc nghiệm

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	B	D	C	A	C	C	C	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
B	C	B	A	B	B	C	A	B	C

B – Tự luận

21. Ta có:

a) $A = \dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} - \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

$= \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 0.$

b) $B = \dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x} \cdot \dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x} - \cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \dfrac{2\sin 2x \cos 2x}{2\cos^2 2x} \cdot \dfrac{\cos 2x}{2\cos^2 x} - \cot\left(\pi + \dfrac{\pi}{2} - x\right).$

Vậy $B = \dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x} - \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} - \tan x = \tan x - \tan x = 0$.

c) $C = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\sin 2x = 2\cos 2x \sin 2x = \sin 4x$.

22. a) Ta có $h = |d| = 3\left|\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right| \le 3$. Vậy người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất khi $\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $t \in [0;2]$ nên $k = 0$ và $k = 1$. Vậy trong vòng 2 giây đầu tiên, người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất tại các thời điểm $t = 0,5$ giây và $t = 2$ giây.

b) Người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 m khi

$$h = 2 \Leftrightarrow 3\left|\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right| = 2 \Leftrightarrow \cos^2\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right] = -\frac{1}{9}.$$

Suy ra $t = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{4\pi}\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) + \frac{3k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Vì $t \in [0;2]$ nên $t \approx 0,10$ giây; $t \approx 0,90$ giây và $t \approx 1,60$ giây.

23. Theo giả thiết ta có $u_4 = u_1q^3$ và $u_7 = u_1q^6$. Mặt khác vì ba số u_1, u_4 và u_7 lần lượt là các số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ mười của một cấp số cộng có công sai *d* nên ta có:

$$\begin{cases} u_4 = u_1q^3 = u_1 + d \\ u_7 = u_1q^6 = u_1 + 9d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1\left(q^3 - 1\right) = d \\ u_1\left(q^6 - 1\right) = 9d. \end{cases}$$

Do $d \neq 0$ nên $9 = \frac{9d}{d} = \frac{u_1\left(q^6-1\right)}{u_1\left(q^3-1\right)} = q^3 + 1 \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$.

24. a) Lương năm thứ 2 theo hợp đồng A là $u_2 = u_1 + 10 = 210$ triệu đồng.

Lương năm thứ 3 theo hợp đồng A là $u_3 = u_2 + 10 = 220$ triệu đồng.

Ta thấy (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 200$ và công sai $d = 10$ nên

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 200 + 10(n-1) = 10n + 190.$$

Nếu người lao động đó làm việc cho công ty trong thời gian 5 năm theo hợp đồng A thì tổng số tiền lương người đó nhận được là

$$S_5(A) = u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 5u_1 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot d = 5 \cdot 200 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 1\,100 \text{ triệu đồng.}$$

b) Lương năm thứ 2 theo hợp đồng B là

$$v_2 = v_1 + v_1 \cdot 5\% = v_1 \cdot 1,05 = 180 \cdot 1,05 = 189 \text{ triệu đồng.}$$

Lương năm thứ 3 theo hợp đồng B là

$$v_3 = v_2 + v_2 \cdot 5\% = v_2 \cdot 1,05 = 189 \cdot 1,05 = 198,45 \text{ triệu đồng.}$$

Ta thấy (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = 180$ và công bội $q = 1,05$ nên

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 180 \cdot 1,05^{n-1}.$$

Nếu người lao động đó làm việc cho công ty trong thời gian 5 năm theo hợp đồng B thì tổng số tiền lương người đó nhận được là

$$S_5(B) = v_1 + v_2 + \cdots + v_5 = v_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 180 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1}{1{,}05 - 1} \approx 994{,}6 \text{ triệu đồng.}$$

c) Lương hằng năm theo hợp đồng B vượt hợp đồng A nếu

$$v_n > u_n \Leftrightarrow 180 \cdot 1{,}05^{n-1} > 10n + 190 \Leftrightarrow 18 \cdot 1{,}05^{n-1} > n + 19.$$

Ta thấy $n = 13$ là số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn bất phương trình này. Vậy từ năm thứ 13 trở đi thì lương hằng năm theo hợp đồng B sẽ cao hơn lương hằng năm theo hợp đồng A.

25. a) Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2+2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}} = 1.$

b) Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \cdots + \dfrac{2^n}{3^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{3}} = 3.$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x-1}{x-2} = \dfrac{5}{4}.$

d) Ta có

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+x+1} + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1} - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - 2x}.$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} - 2} = \frac{1+0}{-\sqrt{4+0+0} - 2} = -\frac{1}{4}.$$

26. a) Ta có $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} (x+3) = 2.$

Hàm số liên tục tại điểm $x = -1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$

b) Rõ ràng hàm số đã cho liên tục tại mọi điểm $x \neq 1$.

Tại điểm $x = 1$, ta có:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} (x^2+2) = 3.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x+m) = 2+m \text{ và } f(1) = 2+m.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

27. a) Ta có $3^{\frac{1}{x}} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \log_3 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\log_3 4} \Leftrightarrow x = \log_4 3$.

b) Ta có $2^{x^2-3x} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2-3x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

c) Điều kiện $x > 3$. Với điều kiện này ta có:

$$\log_4(x+1) + \log_4(x-3) = 3 \Leftrightarrow \log_4(x+1)(x-3) = 3 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 4^3.$$

Từ đó ta được $x^2 - 2x - 67 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt{17}$ hoặc $x = 1 - 2\sqrt{17}$.

Loại $x = 1 - 2\sqrt{17} < 3$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + 2\sqrt{17}$.

d) Ta có

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \ge \frac{1}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \ge \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \le 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3.$$

e) Ta có $\left(2-\sqrt{3}\right)^x \le \left(2+\sqrt{3}\right)^{x+2} \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{-x} \le \left(2+\sqrt{3}\right)^{x+2} \Leftrightarrow -x \le x+2 \Leftrightarrow x \ge -1$.

f) Ta có $\log(3x^2+1) > \log(4x) \Leftrightarrow 3x^2 + 1 > 4x > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 > 0$ và $x > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(0;\dfrac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

28. a) Dung dịch có nồng độ ion hydrogen là 0,1 mol/lít sẽ có độ pH bằng: $pH = -\log 0{,}1 = 1$.

b) Vì hàm số $y = \log x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, nên hàm số $y = -\log x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Suy ra, nếu nồng độ ion hydrogen giảm thì độ pH sẽ tăng.

c) Ta có $pH = 4{,}5 \Leftrightarrow \log\left[H^+\right] = -4{,}5 \Leftrightarrow \left[H^+\right] = 10^{-4{,}5}$.

29. a) Ta có $y' = 3\cdot 2x - 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 6x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Vậy $y' = 6x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Ta có $y' = \dfrac{\left(1+2x-x^2\right)'}{2\sqrt{1+2x-x^2}} = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{1+2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

c) Ta có $y' = \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)'}{\cos^2\dfrac{x}{2}} - \left(-\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)'}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}} + \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

d) Ta có $y' = 2e^{2x} + \dfrac{2x}{x^2} = 2e^{2x} + \dfrac{2}{x}$.

30. Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm t là $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 6$.

a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây là $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 9 = -9$ m/s.

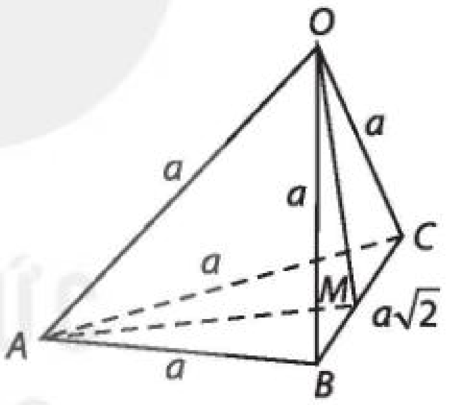
b) Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ giây là $a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$ m/s^2.

c) Vận tốc bằng 0 khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (thoả mãn) hoặc $t = -1$ (loại).

Vậy gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 0 là $a(3) = 12$ m/s^2.

d) Gia tốc bằng 0 khi $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy vận tốc của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0 là $v(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 9 = -12$ m/s.

31. a) Gọi M là trung điểm của BC, ta có:



$$AB = a, AC = a, BC = a\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow OA^2 = OM^2 + AM^2 \Rightarrow \widehat{OMA} = 90^\circ$

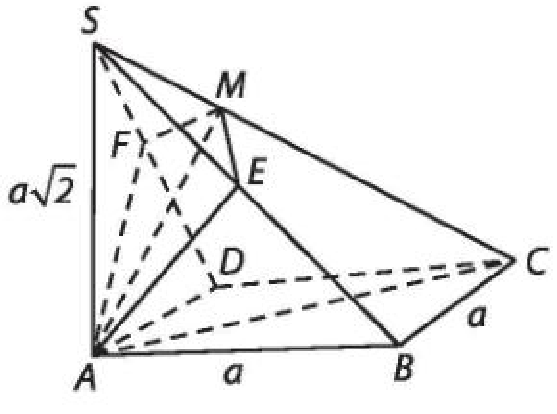
$\Rightarrow OM \perp AM \Rightarrow (OBC) \perp (ABC)$.

b) Ta có:

$d(O;(ABC)) = OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot OM = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

32. a) Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ và

$SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AE \Rightarrow AE \perp (SBC)$.



b) $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Vì $\dfrac{V_{S.AEM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SE}{SB} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AEM} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_{S.AEMF} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

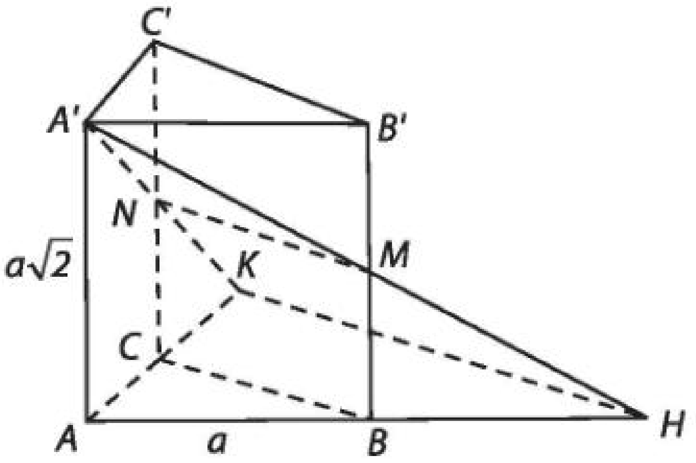
33. a) Vì $MN \,//\, BC$ và $(A'MN) \cap (ABC) = HK$

$\Rightarrow HK \,//\, BC \Rightarrow MN \,//\, HK.$

Cách khác: Chứng minh BC là đường trung bình của tam giác AHK.

b) Ta có: $S_{\Delta AHK} = 4S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$.

$\Rightarrow V_{A'AHK} = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}.$

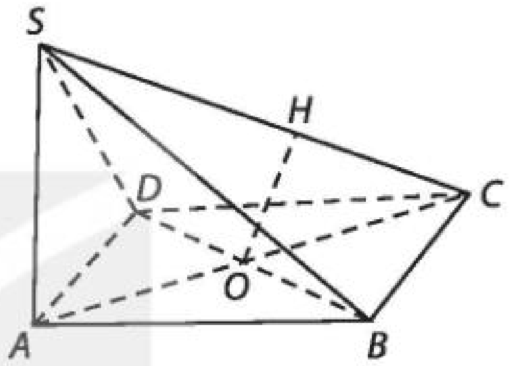


34. a) Ta có:

$BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$

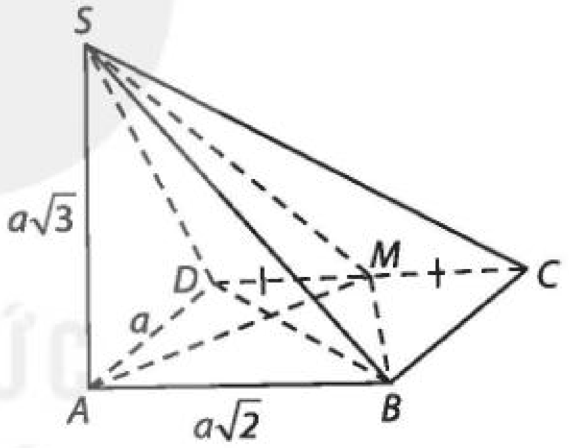
b) Gọi $O = AC \cap BD$. Kẻ $OH \perp SC$ tại H, vì tam giác COH và tam giác CSA đồng dạng nên $\dfrac{CO}{CS} = \dfrac{OH}{SA}$.

$\Rightarrow d(BD, SC) = OH = \dfrac{CO \cdot SA}{CS} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$



35. a) Ta có: $BD \perp AM$ (vì tam giác ABD và tam giác DAM đồng dạng với nhau nên $\widehat{ABD} = \widehat{DAM}$) và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAM)$.

b) $V_{S.ABMD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABMD} \cdot SA = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}.$



36. Cỡ mẫu $n = 8 + 17 + 35 + 56 + 27 + 15 = 158$. Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm thứ ba $(8;\, 11]$, với $j = 3$. Ta có $a_3 = 8$, $h_3 = 3$, $m_3 = 35$, $m \le 8 + 17 = 25$, $r = 1$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất là:

$$Q_1 = 8 + \frac{\frac{158}{4} - 25}{35} \cdot 3 \approx 9{,}24.$$

Doanh nghiệp sẽ hỗ trợ các hộ gia đình có thu nhập dưới 9,24 triệu đồng.

37. a) Gọi A và B tương ứng là biến cố: "Bạn Dũng đạt giải" và "Bạn Cường đạt giải". Từ điều kiện bài toán, A và B là hai biến cố độc lập. Theo công thức nhân, ta có:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}85 \cdot 0{,}9 = 0{,}765.$$

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - 0{,}85)(1 - 0{,}9) = 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}015.$$

Cách 1: Theo công thức cộng, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}85 + 0{,}9 - 0{,}765 = 0{,}985.$$

Cách 2: Biến cố đối của biến cố "Cả hai bạn đều không đạt giải" là biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn đạt giải". Vậy $P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.

b) *Cách 1*: Do $(A, \overline{B})$ độc lập và $(\overline{A}, B)$ độc lập nên theo công thức nhân ta có:

$$P\left(A\overline{B}\right) = P\left(A\right)P\left(\overline{B}\right) = 0{,}85 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}85 \cdot 0{,}1 = 0{,}085.$$

$$P\left(\overline{A}B\right) = P\left(\overline{A}\right)P(B) = (1 - 0{,}85) \cdot 0{,}9 = 0{,}15 \cdot 0{,}9 = 0{,}135.$$

Gọi E là biến cố: "Có đúng một trong hai bạn đạt giải". Ta có $E = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

Theo công thức cộng hai biến cố xung khắc, ta có:

$$P(E) = P\left(A\overline{B} \cup \overline{A}B\right) = P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) = 0{,}085 + 0{,}135 = 0{,}22.$$

Cách 2: Ta có $A \cup B = E \cup AB$.

Hai biến cố E và AB xung khắc, do đó $P(A \cup B) = P(E) + P(AB)$.

Suy ra $P(E) = P(A \cup B) - P(AB) = 0{,}985 - 0{,}765 = 0{,}22$.

38. Gọi E là biến cố: "Cánh phải có ít nhất một động cơ không bị lỗi"; F là biến cố: "Cánh trái có ít nhất một động cơ không bị lỗi".

Biến cố đối $\overline{E}$: "Cả hai động cơ ở cánh phải bị lỗi".

Ta có $P\left(\overline{E}\right) = 0{,}01 \cdot 0{,}01 = 10^{-4}$. Vậy $P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right) = 1 - 10^{-4} = 0{,}9999$.

Tương tự $P(F) = 1 - P\left(\overline{F}\right) = 1 - (0{,}015)^2 \approx 0{,}9998$.

Gọi M là biến cố: "Chuyến bay hạ cánh an toàn".

Ta có $M = EF$. Vậy $P(M) = P(EF) = P(E)P(F) \approx 0{,}9999 \cdot 0{,}9998 \approx 0{,}9997$.

*Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn
các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.*

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng thành viên – Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập lần đầu: HOÀNG VIỆT – VŨ THỊ VÂN – HOÀNG THỊ THANH
Biên tập tái bản: LƯU THẾ SƠN – ĐẶNG THỊ MINH THU
Thiết kế sách: HOÀNG ANH TUẤN
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: PHAN THỊ THANH BÌNH – PHẠM THỊ TÌNH – TẠ THỊ HƯỜNG
Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam
Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

TOÁN 11 – SÁCH GIÁO VIÊN

Mã số:

In .... cuốn (QĐ .... SLK), khổ 19 x 26,5cm.
In tại Công ty cổ phần in ....
Số ĐKXB: ..../CXBIPH/....................../GD
Số QĐXB: .... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm 202
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 202
Mã số ISBN:

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO VIÊN LỚP 11 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 11, tập một – SGV
2. Ngữ văn 11, tập hai – SGV
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11 – SGV
4. Toán 11 – SGV
5. Chuyên đề học tập Toán 11 – SGV
6. Lịch sử 11 – SGV
7. Chuyên đề học tập Lịch sử 11 – SGV
8. Địa lí 11 – SGV
9. Chuyên đề học tập Địa lí 11 – SGV
10. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11 – SGV
11. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11 – SGV
12. Vật lí 11 – SGV
13. Chuyên đề học tập Vật lí 11 – SGV
14. Hoá học 11 – SGV
15. Chuyên đề học tập Hoá học 11 – SGV
16. Sinh học 11 – SGV
17. Chuyên đề học tập Sinh học 11 – SGV
18. Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí – SGV
19. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí – SGV
20. Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi – SGV
21. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi – SGV
22. Tin học 11 – SGV
23. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng – SGV
24. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính – SGV
25. Mĩ thuật 11 – SGV
26. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 11 – SGV
27. Âm nhạc 11 – SGV
28. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11 – SGV
29. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11 – SGV
30. Giáo dục thể chất 11 – Bóng chuyền – SGV
31. Giáo dục thể chất 11 – Bóng đá – SGV
32. Giáo dục thể chất 11 – Cầu lông – SGV
33. Giáo dục thể chất 11 – Bóng rổ – SGV
34. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11 – SGV
35. Tiếng Anh 11 – Global Success – SGV

Website: https://www.nxbgd.vn

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG